GRONDSLAGEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

W. ECKHAUS


REPRODUKTIE
FYSISCH LABORATORIUM

INHOUDSOPGAVE.

Hoofdstuk 1: Definities, notaties en afkortingen.

Wij beschouwen uitsluitend reële konstanten, veranderlijken en funkties.

Notatie:

De intervallen $a < x < b$, $a \leqq x < b$ en $a \leqq x \leqq b$ schrijven wij resp. als (a,b), $[a,b)$ en $[a,b]$.

Definitie (1.1):

$y = y(x)$, $x \in (a,b)$ betekent: y is een funktie van de onafhankelijke veranderlijke x gedefinieerd op het interval $a < x < b$.

Notatie:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

meestal schrijven wij $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$.

Definitie (1.2):

Een n-de orde differentiaalvergelijking is een vergelijking van de vorm:

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$$

waarin F een funktie is van de veranderlijken $x,y,y',\ldots,y^{(n)}$.

Definitie (1.3):

Een funktie $y = y(x)$, $x \in (a,b)$, die n-maal differentieerbaar is en voldoet aan $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$ voor $x \in (a,b)$ heet een oplossing van de n-de orde differentiaalvergelijking.

Wij onderscheiden:

a) een impliciet bepaalde oplossing d.w.z. een betrekking van de vorm $G(x,y) = 0$;

b) een expliciet bepaalde oplossing $y = y(x)$.

Definitie (1.4):

De differentiaalvergelijking $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$ heet lineair als $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$ een lineaire funktie is in $y,y',\ldots,y^{(n)}$.

De algemene vorm waarin een n-de orde lineaire differentiaalvergelijking geschreven kan worden luidt:

$$f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots f_1(x)y'+f_o(x)y=g(x) \qquad (1.1)$$

$$f_n(x) \not\equiv 0.$$

Definitie (1.5):

Als in bovenstaande differentiaalvergelijking $g(x) \equiv 0$ dan heet de lineaire differentiaalvergelijking homogeen.

Wij kunnen de lineariteit van een differentiaalvergelijking nog op een andere wijze definiëren:

Laten $u=u(x)$ en $v=v(x)$, $x\in(a,b)$ twee willekeurige n-maal differentieerbare funkties zijn.

Definitie (1.6):

De differentiaalvergelijking heet lineair als:

$$F(u^{(n)}+v^{(n)},\ldots,u'+v',u+v,x)=F(u^{(n)},\ldots,u',u,x)+F(v^{(n)},\ldots,v',v,x) - -F(0,\ldots,0,0,x). \qquad (1.2)$$

Als bovendien geldt: $F(0,\ldots,0,0x)\equiv 0$ dan is de differentiaalvergelijking homogeen.

Opgave:

Bewijs dat (1.1) voldoet aan de definitievergelijking (1.2) van een lineaire differentiaalvergelijking.

Definitie (1.7):

Een differentiaalvergelijking, die in de vorm

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \qquad (1.3)$$

geschreven kan worden, heet een expliciete n-de orde differentiaalvergelijking.

Een expliciete n-de orde differentiaalvergelijking kan door het invoeren van:

$$y = y_1,\ y' = y_2,\ldots,y^{(n-1)} = y_n$$

geschreven worden als het volgende stelsel van eerste orde differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_3$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x,y_1,y_2,\ldots,y_n).$$

Hoofdstuk 2: Eerste orde differentiaalvergelijkingen.

Inleiding.

De algemene vorm van een expliciete eerste orde differentiaalvergelijking luidt:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \qquad (2.1)$$

Wij beschouwen eerst een bijzonder geval van (2.1) n.l.:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (2.2)$$

$f(x)$ is continu voor $a < x < b$.

De oplossing van (2.2) luidt:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x')dx' + c, \quad x_0 \in (a,b) \qquad (2.3)$$

$c=y(x_0)$ is een willekeurige konstante.

De geometrische betekenis van (2.2) en (2.3) is als volgt in te zien. De hoek φ die de raaklijn aan de kromme $y=y(x)$ in het punt (x,y) met de positieve x-as maakt, wordt bepaald door:

$$\text{tg}\varphi = f(x). \qquad (2.4)$$

Aan ieder punt van het gebied D: $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ wordt een zekere richting, gedefinieerd door (2.4), toegevoegd. Geometrisch stelt (2.2) in dit gebied een richtingsveld voor.

De kromme $y=y(x)$ met $y(x_0)=c$ is nu een oplossingskromme of integraalkromme als de raaklijn in ieder punt van de kromme juist de door het richtingsveld gegeven richting heeft.

Daar c nog willekeurig gekozen kan worden, zijn er oneindig veel integraalkrommen, die voorgesteld worden door (2.3). Zij het punt $(\xi,\eta)\in D$. (ξ,η) is een punt van de integraalkromme:

$$y = \int_{\xi}^{x} f(x')dx' + \eta.$$

Door ieder punt van D gaat één en slechts één integraalkromme. Geometrisch is de existentie en eenduidigheid van de oplossing van (2.2) met de beginvoorwaarde $x=x_0$, $y(x_0)=c$ in te zien.

Welke eisen moeten wij nu aan $f(x,y)$ in (2.1) stellen opdat (2.1) voor $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$ één en slechts één oplossing heeft?

Zij D een gebied in het x-y vlak.

Definitie (2.1):

$f(x,y)$ is op D Lipschitz-kontinu in y als er een konstante $\lambda>0$ bestaat zodanig dat voor elke (x,y_1), $(x,y_2)\in D$ geldt:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \lambda|y_1 - y_2|.$$

Existentie-stelling.

Zij $f(x,y)$ gedefinieerd op D en kontinu in x en y. Er bestaat dan voor elke $(x_0,y_0)\in D$ een oplossing $y=y(x)$ van $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ zodanig dat $y(x_0)=y_0$.

Eenduidigheidsstelling.

Als de voorwaarden van de existentiestelling gelden en bovendien $f(x,y)$ op D Lipschitz-kontinu is in y dan heeft de differentiaalvergelijking één en slechts één oplossing.

De bewijzen van deze stellingen worden later gegeven.

Voorbeeld:

Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$ met beginvoorwaarden $y(0)=0$. $\sqrt{y}$ is niet-Lipschitz-kontinu voor $y=0$. Wij merken op dat door $(0,0)$ twee integraalkrommen gaan namelijk: $y(x)\equiv 0$ en $y(x)=x^2$.

Enige klassen van expliciete eerste orde differentiaalvergelijkingen die integreerbaar zijn.

I. De differentiaalvergelijking van het type

$$\frac{dy}{dy} = f(x)g(y). \qquad (2.5)$$

Deze vergelijking heet een differentiaalvergelijking met gescheiden veranderlijken. $f=f(x)$, $x\in(a,b)$ en $g=g(y)$, $y\in(c,d)$ met $g(y)\neq 0$ op (c,d) zijn kontinue funkties op (a,b) resp. (c,d). Veronderstel dat het punt (x_0,y_0) een punt is van een integraalkromme $y=y(x)$ van (2.5) zodat

$$y(x_0) = y_0.$$

Uit (2.5) volgt: $\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$ of na integratie:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\bar{y}}{g(\bar{y})} = \int_{x_0}^{x} f(\bar{x})d\bar{x} \;. \qquad (2.6)$$

Dit resultaat kunnen wij ook op een andere wijze afleiden.

Wij voeren de funkties $F(x)$ en $G(y)$ in gedefinieerd volgens:

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= -\int_{x_0}^{x} f(\bar{x})d\bar{x} \\ G(y(x)) &= \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\bar{y}}{g(\bar{y})} \;. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Na differentiatie verkrijgen wij:

$$\frac{dF(x)}{dx} = -f(x)$$

$$\frac{dG(y(x))}{dx} = \frac{1}{g(y(x))}\frac{dy}{dx} \;.$$

Optelling levert:

$$\frac{dF(x)}{dx} + \frac{dG(y(x))}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) + G(y(x))\right] = 0$$

$$F(x) + G(y(x)) = \text{konst.} \qquad (2.8)$$

Substitutie van (2.7) in (2.8) levert met de voorwaarde $y(x_0)=y_0$ de betrekking

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\bar{y}}{g(\bar{y})} = \int_{x_0}^{x} f(\bar{x})d\bar{x}$$

waarmee de oplossing impliciet bepaald is.

II. De differentiaalvergelijking van het type:

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C) \qquad (2.9)$$

waarin A, B en C konstanten, kan teruggebracht worden tot een differentiaalvergelijking met gescheiden veranderlijken.

$f(u)$ is een kontinue funktie op (a,b).

Stel

$$u(x) = Ax + By(x) + C \qquad (2.10)$$

$y(x_0)=y_0 \rightarrow u(x_0)=Ax_0+By_0+C=u_0 \in (a,b)$.

Differentiatie van (2.10) naar x levert:

$$\frac{du}{dx} = A + B\,\frac{dy}{dx} = A + B\,f(u).$$

De oplossing wordt nu impliciet bepaald door:

$$\int_{u_0}^{u} \frac{d\bar{u}}{A+B\,f(\bar{u})} = x - x_0, \qquad (2.11)$$

als de integraal in het linkerlid bestaat.

III. De differentiaalvergelijking van het type:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2.12)$$

kan teruggebracht worden tot een differentiaalvergelijking met gescheiden veranderlijken.

$f(u)$, $u \in (a,b)$ is een kontinue funktie op (a,b). Stel

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad (2.13)$$

$y(x_0) = y_0 \rightarrow u(x_0) = \frac{y_0}{x_0} = u_0$.

Differentiatie van (2.13) naar x levert:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left[f(u) - u\right].$$

De oplossing wordt impliciet bepaald door:

$$\int_{u_o}^{u} \frac{d\bar{u}}{f(\bar{u})-\bar{u}} = \ln \frac{x}{x_o} \qquad (2.14)$$

als de integraal in het linkerlid bestaat.

IV. De differentiaalvergelijking van het type:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x) \qquad (2.15)$$

$f(x)$ en $g(x)$, $x \in (a,b)$ kontinu op (a,b) is een lineaire inhomogene differentiaalvergelijking.

Beschouw eerst de homogene vergelijking

$$\frac{dy_H}{dx} = f(x)y_H \qquad (2.16)$$

met als algemene oplossing:

$$y_H = c \exp(\int f(x)dx) \qquad (2.17)$$

waarin c een willekeurige konstante is.

Stel nu dat de oplossing van de inhomogene vergelijking geschreven kan worden in de vorm:

$$y = c(x) \exp (\int f(x)dx). \qquad (2.18)$$

Substitutie van (2,18) in (2.15) levert de volgende differentiaalvergelijking voor $c(x)$:

$$\frac{dc}{dx} = g(x) \exp (-\int f(x)dx). \qquad (2.19)$$

Uit (2.18) en (2.19) volgt:

$$y = \exp (\int f(x)dx) \cdot \int g(x) \exp [-\int f(x)dx]dx = y_P. \qquad (2.20)$$

y_P heet een particuliere oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking.

De algemene oplossing van (2.15) is nu

$$y = y_H + y_P \qquad (2.21)$$

of

$$y = c \exp(\int f(x)dx) + \exp(\int f(x)dx) \int g(x)\exp[-\int f(x)dx]dx . \qquad (2.22)$$

Zij $x_o \in (a,b)$. Bij iedere y_o is nu de konstante c in (2.22) te bepalen zodanig dat $y(x_o)=y_o$. De methode, die hier gebruikt is om de algemene oplossing van (2.15) te konstrueren heet de methode van de variatie der konstanten.

V. De differentiaalvergelijking van het type:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + h(x)y^{\alpha} . \qquad (2.23)$$

Deze vergelijking heet de differentiaalvergelijking van Bernoulli.

Voor $\alpha=0$ verkrijgen wij type IV en voor $\alpha=1$ type I, of IV maar dan homogeen. Stel dus $\alpha\neq1$, $\alpha\neq0$. De differentiaalvergelijking is dan niet-lineair. $f(x)$ en $h(x)$, $x\in(a,b)$ zijn kontinu op (a,b).

Stel

$$u(x) = [y(x)]^{1-\alpha}. \tag{2.24}$$

Hieruit volgt:

$$y(x) = [u(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.25}$$

Differentiatie van (2.25) naar x levert m.b.v. (2.23) de volgende <u>lineaire</u> differentiaalvergelijking voor $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} = (1-\alpha)\ f(x)u + (1-\alpha)\ h(x). \tag{2.26}$$

Dit is een vergelijking van het type IV.

VI. De differentiaalvergelijking van het type:

$$h(x,y)\ \frac{dy}{dx} + g(x,y) = 0 \tag{2.27}$$

waarin $h(x,y)$, $g(x,y)$, $\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$ en $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ op een enkelvoudig samenhangend gebied D van het (x,y)-vlak gedefinieerd en kontinu zijn, heet een op D <u>exacte differentiaalvergelijking</u> als geldt:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2.28}$$

Op D is een funktie $F(x,y)$ gedefinieerd, die tweemaal kontinu differentieerbaar is in x en y zodanig dat:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = h(x,y); \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = g(x,y). \tag{2.29}$$

Als (2.29) geldt, is ook voldaan aan (2.28) terwijl de oplossing van (2.27) impliciet gegeven wordt door:

$$F(x,y) = \text{konstant}. \tag{2.30}$$

De relaties (2.29) blijven geldig als wij bij F een konstante optellen. Stel als D het gehele (x,y)-vlak is:

$$F(0,0) = 0.$$

Er geldt nu:

$$F(x,0) = \int_0^x \frac{\partial F(\xi,0)}{\partial \xi}\, d\xi = \int_0^x g(\xi,0)d\xi \tag{2.31}$$

$$F(0,y) = \int_0^y \frac{\partial F(0,\eta)}{\partial \eta}\, d\eta = \int_0^y h(0,\eta)d\eta\ . \tag{2.32}$$

M.b.v. (2.31) kunnen wij F(x,y) berekenen:

$$F(x,y) - F(x,0) = \int_0^y \frac{\partial F(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta = \int_0^y h(x,\eta)d\eta$$

waaruit volgt:

$$F(x,y) = \int_0^x g(\xi,0)d\xi + \int_0^y h(x,\eta)d\eta. \qquad (2.33)$$

Ook geldt:

$$F(x,y) - F(0,y) = \int_0^x \frac{\partial F(\xi,y)}{\partial \xi} d\xi = \int_0^x g(\xi,y)d\xi$$

waaruit m.b.v. (2.32) volgt:

$$F(x,y) = \int_0^y h(0,\eta)d\eta + \int_0^x g(\xi,y)d\xi. \qquad (2.34)$$

Opgave:
Bewijs dat de uitdrukkingen (2.33) en (2.34) voor F(x,y) identiek zijn.

Opgave:
Bewijs dat (2.5) een exacte differentiaalvergelijking is.

Een klasse van niet-exacte differentiaalvergelijkingen kan teruggebracht worden tot de klasse van differentiaalvergelijkingen van het exacte type. Beschouw een funktie $M(x,y) \neq 0$ gedefinieerd op D en daarop kontinu differentieerbaar. Zij gegeven

$$h(x,y)\frac{dy}{dx} + g(x,y) = 0. \qquad (2.35)$$

De differentiaalvergelijking

$$M(x,y)\, h(x,y)\frac{dy}{dx} + M(x,y)\, g(x,y) = 0 \qquad (2.36)$$

is nu exact als geldt:

$$\frac{\partial\, Mh}{\partial x} = \frac{\partial\, Mg}{\partial y}. \qquad (2.37)$$

Voor het bepalen van de algemene oplossing van (2.35) moet nu eerst de funktie M(x,y), die ook wel integrerende factor heet als oplossing bepaald worden van de volgende eerste orde partiële differentiaalvergelijking:

$$h\frac{\partial M}{\partial x} - g\frac{\partial M}{\partial y} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)M = 0. \qquad (2.38)$$

Integratie van (2.38) is in het algemeen veel moeilijker dan integratie van een eerste orde gewone differentiaalvergelijking. Het vinden van een oplossing van (2.38) geschiedt voorlopig door proberen of raden.
Het is vaak nuttig om na te gaan of aan (2.38) voldaan kan worden door te stellen: M=M(x).

(2.38) reduceert zich dan tot de volgende lineaire gewone differentiaal-vergelijking:

$$h \frac{dM}{dx} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)M = 0 . \qquad (2.40)$$

Hoofdstuk 3: Stelsels van eerste orde differentiaalvergelijkingen.

Definitie (3.1):

Onder een n-dimensionale vector $\vec{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ verstaan wij een geordende rij van n getallen.

Wij spreken af dat voor n-dimensionale vectoren de volgende rekenregels gelden:

a) de nulvector $\vec{0}$ is de vector $\vec{0}=(0,0,\dots,0)$;

b) zij $\vec{v}$ een vector met kentallen $(v_1,v_2,\dots,v_n)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v} \leftrightarrow u_i = v_i \\ \vec{u} = \vec{0} \leftrightarrow u_i = 0; \end{array}\right\} \quad i = 1,2,\dots,n$$

c) $a\vec{u} = (au_1,au_2,\dots,au_n)$, waarin a een konstante is;

d) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1+v_1,\ u_2+v_2,\dots,u_n+v_n)$;

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots u_nv_n$;

f) de norm of lengte van een vector is:

$$|\vec{u}| = \{u_1^2 + u_2^2 + \dots u_n^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Definitie (3.2):

Zij G een deelverzameling van de m-dimensionale ruimte (m kan bijv. 1, n of n+1 zijn).

Een vectorfunktie is een voorschrift volgens welke wij aan ieder element van G een n-dimensionale vector toevoegen. Wij kunnen een vectorfunktie ook als volgt definiëren:

Een vectorfunktie is een afbeelding van G in de E_n.

Wij beschouwen n eerste orde differentiaalvergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1(x)}{dx} = f_1(y_1,y_2,\dots,y_n,x) \\ \dfrac{dy_2(x)}{dx} = f_2(y_1,y_2,\dots,y_n,x) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n(x)}{dx} = f_n(y_1,y_2,\dots,y_n,x) \end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

Wij definiëren nu de vectorfunkties $\vec{y}$ en $\vec{f}(\vec{y},x)$:

$$\vec{y}(x) = (y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x))$$

$$\vec{f}(\vec{y},x)=(f_1(y_1,y_2,\dots,y_n,x),\ f_2(y_1,y_2,\dots,y_n,x)\dots f_n(y_1,y_2,\dots,y_nx)).$$

Definitie (3.3):

$\frac{d\vec{y}}{dx}$ heeft als componenten: $\frac{d\vec{y}}{dx} = (\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx})$.

De vector $\int_a^b \vec{y}(x)dx$ heeft als componenten:

$$(\int_a^b y_1(x)dx, \int_a^b y_2(x)dx, \ldots, \int_a^b y_n(x)dx).$$

Stelsel (3.1) kan nu als volgt (verkort) worden geschreven:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(\vec{y},x) \tag{3.2}$$

Stelling (3.1):

I. $|\vec{u}.\vec{v}| \leqq |\vec{u}|\,|\vec{v}|$ (ongelijkheid van Cauchy-Schwarz) (3.3)

II. $|\vec{u}+\vec{v}| \leqq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (driehoeksongelijkheid) (3.4)

III. $|\int_a^b \vec{y}(x)dx| \leqq \int_a^b |\vec{y}(x)|dx$ (3.5)

Bewijs:

I. $(a-b)^2 \geqq 0 \rightarrow a^2+b^2 \geqq 2ab$

$$2|\vec{u}.\vec{v}|^2 = 2\Big[\sum_i u_iv_i\Big]^2 = 2\sum_i u_iv_i \sum_j u_jv_j =$$

$$= 2\sum_{i,j}(u_iv_j)(u_jv_i) \leqq \sum_{i,j}(u_iv_j)^2 + (u_jv_i)^2 = 2|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2.$$

Hieruit volgt:

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leqq |\vec{u}|\,|\vec{v}|.$$

II. $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \sum_i (u_i+v_i)^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\sum_i u_iv_i \leqq$

$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\sum_i u_iv_i| = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}.\vec{v}| \leqq$

$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}| = \{|\vec{u}| + |\vec{v}|\}^2.$

Hieruit volgt:

$$|\vec{u}+\vec{v}| \leqq |\vec{u}| + |\vec{v}|.$$

III. $|\int_a^b \vec{y}(x)dx|^2 = \sum_i \Big\{\int_a^b y_i(x)dx\Big\}^2 = \sum_i \int_a^b y_i(x)dx \int_a^b y_i(\xi)d\xi$

$= \int_a^b\int_a^b \sum_i y_i(x)y_i(\xi)dxd\xi \leqq \int_a^b\int_a^b \sum_i |y_i(x)y_i(\xi)|dxd\xi$

$= \int_a^b\int_a^b |\vec{y}(x).\vec{y}(\xi)|dxd\xi \leqq \int_a^b\int_a^b |\vec{y}(x)|\,|\vec{y}(\xi)|dxd\xi = \Big\{\int_a^b |\vec{y}(x)|dx\Big\}^2.$

Hieruit volgt:

$$|\int_a^b \vec{y}(x)dx| \leqq \int_a^b |\vec{y}(x)|dx.$$ q.e.d.

Definitie (3.4):

Zij G een samenhangende open verzameling, kortweg gezegd een gebied, in de $(n+1)$-dimensionale $(x,y_1,y_2,\dots,y_n)$ ruimte.

$\vec{f}(\vec{y},x)$ is op G Lipschitz-kontinu in $\vec{y}$ als er een konstante λ bestaat zodanig dat voor elke $(x,\vec{y}^*)$, $(x,\vec{y}^{**})\in G$ geldt:

$$|\vec{f}(\vec{y}^*,x) - \vec{f}(\vec{y}^{**},x)| \leq \lambda|\vec{y}^* - \vec{y}^{**}|. \qquad (3.6)$$

Opgave:

Ga na dat als de partiële afgeleiden $\dfrac{\partial f_i(y_1,\dots,y_n,x)}{\partial y_k}$ $(i,k=1,2,\dots,n)$ bestaan en kontinu zijn, $\vec{f}(\vec{y},x)$ Lipschitz-kontinu is in $\vec{y}$ als G konvex is.

Existentiestelling (3.2):

Zij gegeven stelsel (3.1) in de vorm $\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(\vec{y},x)$.

Zij $\vec{f}(\vec{y},x)$ kontinu op G: $|\vec{y}-\vec{y}_o|<b$, $|x-x_o|<a$ in $\vec{y}$ en x en Lipschitz-kontinu op G in $\vec{y}$ en zij $\vec{f}(\vec{y},x)$ begrensd op G, d.w.z. $|\vec{f}(\vec{y},x)|\leq M$. Dan bestaat er voor $|x-x_o|<\alpha<a$ tenminste één oplossing van

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(\vec{y},x) \text{ met } \vec{y}(x_o) = \vec{y}_o. \qquad (3.7)$$

$\alpha=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$.

Bewijs:

Wij zullen deze stelling bewijzen m.b.v. de methode der suksessieve approximatie, ook de iteratie-methode van Picard-Lindelöf genoemd.

Wij schrijven de differentiaalvergelijking als integraalvergelijking:

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_o + \int_{x_o}^{x} \vec{f}(\vec{y}(\xi),\xi)d\xi. \qquad (3.8)$$

Definieer $\vec{y}^{(1)}(x)$ door:

$$\vec{y}^{(1)}(x) = \vec{y}(x_o) + \int_{x_o}^{x} \vec{f}(\vec{y}(x_o),\xi)d\xi. \qquad (3.9)$$

Definieer $\vec{y}^{(2)}(x)$ door:

$$\vec{y}^{(2)}(x) = \vec{y}(x_o) + \int_{x_o}^{x} \vec{f}(\vec{y}^{(1)}(\xi),\xi)d\xi. \qquad (3.10)$$

Algemeen:

$$\vec{y}^{(n)}(x) = \vec{y}(x_o) + \int_{x_o}^{x}\vec{f}(\vec{y}^{(n-1)}(\xi),\xi)d\xi \quad n=2,3,4,\dots \qquad (3.11)$$

Wij zullen aantonen dat de rij vectorfunkties $\vec{y}^{(n)}(x)$ voor $n\to\infty$ naar de limietfunktie $\vec{z}(x)$ nadert;

$$\lim_{n\to\infty} \vec{y}^{(n)}(x) = \vec{z}(x),$$

die oplossing is van de integraalvergelijking (3.8) en daarmee ook oplossing van (3.7)

$$(3.9) \rightarrow |\vec{y}^{(1)}-\vec{y}_o| \leqq \int_{x_o}^{x} |\vec{f}(\vec{y}(x_o),\xi)|d\xi \leqq M|x-x_o|.$$

Verder geldt:

$$|\vec{y}^{(n+1)}-\vec{y}^{(n)}| \leqq \int_{x_o}^{x} |\vec{f}(\vec{y}^{(n)}(\xi),\xi) - \vec{f}(\vec{y}^{(n-1)}(\xi),\xi)|d\xi$$

$$|\vec{y}^{(n+1)}-\vec{y}^{(n)}| \leqq \lambda \int_{x_o}^{x} |\vec{y}^{(n)}-\vec{y}^{(n-1)}|d\xi$$

$$(3.9),(3.10) \rightarrow |\vec{y}^{(2)}-\vec{y}^{(1)}| \leqq \lambda \int_{x_o}^{x} |\vec{y}^{(1)}-\vec{y}_o|d\xi \leqq M\lambda \frac{(x-x_o)^2}{2}.$$

Door middel van volledige inductie volgt nu:

$$|\vec{y}^{(n+1)} - \vec{y}^{(n)}| \leqq M \lambda^n \frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$(3.11) \rightarrow |\vec{y}^{(n)} - \vec{y}(x_o)| \leqq |x-x_o|M < b.$$

Wij beperken ons tot het interval $|x-x_o|<\alpha=\min(a,\frac{b}{M})$.
Beschouw de reeks:

$$\vec{z}(x) = \vec{y}(x_o) + (\vec{y}^{(1)}(x) - \vec{y}(x_o)) + (\vec{y}^{(2)}(x) - \vec{y}^{(1)}(x)) +$$
$$+ \vec{y}^{(3)}(x) - \vec{y}^{(2)}(x)) + \dots (\vec{y}^{(n)}(x) - \vec{y}^{(n-1)}(x)) + \dots =$$
$$= \vec{y}(x_o) + \sum_{n=o}^{\infty} (\vec{y}^{(n+1)}(x) - \vec{y}^{(n)}(x)). \qquad (3.12)$$

Deze reeks wordt absoluut gemajoreerd door de konvergente reeks:

$$|\vec{y}(x_o)| + M\alpha + M\lambda \frac{\alpha^2}{2} + M\lambda^2 \frac{\alpha^3}{3!} + \dots M\lambda^n \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} + \dots = |\vec{y}(x_o)| + \frac{M}{\lambda}(e^{\lambda\alpha}-1).$$

Uit die analyse volgt nu dat (3.12) absoluut en gelijkmatig (uniform) konvergeert op $|x-x_o|<\alpha$. De partiële som van (3.12) is $\vec{y}^{(n)}(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \vec{y}^{(n)}(x)$$

bestaat en is gelijk aan $\vec{z}(x)$, de konvergentie is gelijkmatig (uniform) op $|x-x_o|<\alpha$.

$$(3.11) \rightarrow \lim_{n\to\infty} \vec{y}^{(n)}(x) = \vec{y}(x_o) + \lim_{n\to\infty} \int_{x_o}^{x} \vec{f}(\vec{y}^{(n-1)}(\xi),\xi)d\xi,$$

Hieruit volgt wegens gelijkmatige konvergentie:

$$\vec{z}(x) = \vec{y}(x_o) + \int_{x_o}^{x} \lim_{n\to\infty} \vec{f}(\vec{y}^{(n-1)}(\xi),\xi)d\xi$$

en daar $\vec{f}(\vec{y},x)$ kontinu is in $\vec{y}$:

$$\vec{z}(x) = \vec{y}(x_o) + \int_{x_o}^{x} \vec{f}(\lim_{n\to\infty} \vec{y}^{(n-1)}(\xi),\xi)d\xi$$

$$\vec{z}(x) = \vec{y}(x_o) + \int_{x_o}^{x} \vec{f}(\vec{z}(\xi),\xi)d\xi.$$

Deze laatste integraalvergelijking is equivalent met:

$$\frac{d\vec{z}(x)}{dx} = \vec{f}(\vec{z}(x),x)$$

m.a.w. $z(x)$ is oplossing van de differentiaalvergelijking.

Opmerking:

De existentiestelling kan ook bewezen worden zonder gebruik te maken van de Lipschitz-kontinuïteit.

Eenduidigheidsstelling (3.3):

Als er voldaan aan alle voorwaarden genoemd bij de existentiestelling dan is er één en slechts één oplossing van het stelsel waarvoor geldt $\vec{y}(x_o)=\vec{y}_o$.

Bewijs:

Stel $\vec{\zeta}(x)$ is een andere oplossing:

$$\vec{\zeta}(x) = \vec{y}(x_o) + \int_{x_o}^{x} \vec{f}(\vec{\zeta}(\xi),\xi)d\xi \qquad (3.13)$$

$$(3.11) \rightarrow \vec{y}^{(n+1)}(x) = \vec{y}(x_o) + \int_{x_o}^{x} \vec{f}(\vec{y}^{(n)}(\xi),\xi)d\xi \qquad (3.14)$$

$$(3.13) \rightarrow |\vec{\zeta}(x) - \vec{y}(x_o)| \leq M|x-x_o|$$

$$(3.13),(3.14) \rightarrow |\vec{\zeta}(x) - \vec{y}^{(n+1)}(x)| \leq \lambda \int_{x_o}^{x} |\vec{\zeta}(\xi) - \vec{y}^{(n)}(\xi)|d\xi.$$

Hieruit volgt:

$$|\vec{y}^{(n+1)}(x) - \vec{\zeta}(x)| \leq M\lambda^n \frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} |\vec{y}^{(n+1)}(x) - \vec{\zeta}(x)| = |\vec{z}(x) - \vec{\zeta}(x)| = 0 \rightarrow \vec{z}(x) = \vec{\zeta}(x).$$

Definitie (3.5):
$\vec{f}(\vec{y},x)$ is regulier analytisch op G als $\vec{f}(\vec{y},x)$ een willekeurig aantal keer kontinu differentieerbaar is naar x en y_i $(i=1,\dots,n)$.

Stelling (3.4):
Als $\vec{f}(\vec{y},x)$ regulier analytisch is op G dan bestaat de oplossing van

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(\vec{y},x) \quad \text{met } \vec{y}(x_o) = \vec{y}_o \tag{3.15}$$

voor $|x-x_o|<\alpha$ en is willekeurig vaak kontinu differentieerbaar naar x.

Bewijs:
Als wij kunnen aantonen dat $\vec{f}(\vec{y},x)$ Lipschitz-kontinu is in $\vec{y}$ dan kunnen wij met behulp van de methode van Picard-Lindelöf het bewijs leveren.

$$\vec{f}(\vec{y},x) = (f_1(y_1,\dots,y_n,x),\dots,f_n(y_1,\dots,y_n,x)).$$

$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ is kontinu dus begrensd: $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| < M.$

$$|f_i(y_1,y_2,\dots,y_n,x) - f_i(y_1^*,y_2,\dots,y_n,x)| = \int_{y_1}^{y_1^*} \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\, dy_1 \leq M|y_1-y_1^*|.$$

Hieruit volgt:

$$|f_i(y_1,y_2,y_3,\dots,y_n,x) - f_i(y_1^*,y_2^*,y_3^*,\dots,y_n^*,x)| \leq$$

$$|f_i(y_1,y_2,y_3,\dots,y_n,x) - f_i(y_1^*,y_2^*,y_3^*,\dots,y_n^*,x)| + |f_i(y_1^*,y_2,y_3,\dots,y_n,x) -$$

$$- f_i(y_1^*,y_2^*,y_3,\dots,y_n,x)|$$

$$+ |f_i(y_1^*,y_2^*,y_3,\dots,y_n,x) - f_i(y_1^*,y_2^*,y_3^*,y_4,\dots,y_n,x)| + \dots$$

$$|f_i(y_1^*,\dots,y_{n-1}^*,y_n,x) - f_i(y_1^*,\dots,y_n^*,x)| \leq M \sum_{i=1}^{n} |y_i - y_i^*|.$$

Er volgt nu voor:

$$|\vec{f}(\vec{y},x) - \vec{f}(\vec{y}^*,x)| = \{|f_1(\vec{y},x) - f_1(\vec{y}^*,x)|^2 + \dots |f_n(\vec{y},x)-f_n(\vec{y}^*,x)|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\{ n\, M^2\left[\sum_{i=1}^{n} |y_i-y_i^*|\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n}\, M \sum_{i=1}^{n} |y_i-y_i^*| \tag{3.16}$$

Verder geldt:

$$|y_i-y_i^*| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [y_i-y_i^*]^2}$$

of

$$|y_i-y_i^*| \leq |\vec{y}-\vec{y}^*|. \tag{3.17}$$

Uit (3.16) en (3.17) volgt nu:

$$|\vec{f}(\vec{y},x) - \vec{f}(\vec{y}^*,x)| \leq n\sqrt{n}\, M|\vec{y}-\vec{y}^*|.$$

De Lipschitz-konstante λ uit (3.6) is dus gelijk aan $n\sqrt{n}\,M$.

Wij moeten bewijzen dat $\vec{y}(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar is. Dit moet dan gelden voor iedere komponent van $\vec{y}(x)$.

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x,y_1,\ldots,y_n) \qquad f_i \text{ is kontinu differentieerbaar}$$

volgt:

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} f_j$$

Deze laatste term is wederom kontinu differentieerbaar. Met behulp van volledige inductie kan nu aangetoond worden dat $y_i(x)$ willekeurig vaak kontinu differentieerbaar is naar x.

Lineaire stelsels.

Definitie (3.6):

Een lineair inhomogeen stelsel differentiaalvergelijkingen is een stelsel van de vorm:

$$\begin{aligned}\frac{dy_i}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots a_{1n}(x)y_n + b_1(x)\\ &\vdots\\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots a_{nn}(x)y_n + b_n(x).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Als $b_i(x)\equiv 0$ $(i=1,\ldots,n)$ heet het lineaire stelsel homogeen.

In vectornotatie luidt (3.18):

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{b} \tag{3.19}$$

waarin $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ $\vec{b}=(b_1(x),\ldots,b_n(x))$ en

$A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ een nxn matrix.

Beschouw de homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y}. \tag{3.20}$$

Stelling (3.5):

$\vec{y}=\vec{0}$ is een oplossing van (3.20).

Als $\vec{y}^{(\nu)}$ $(\nu=1,\dots,p)$ voor het interval (a,b) oplossingen zijn van (3.20) dan is ook voor willekeurige konstanten c_ν de lineaire kombinatie:

$$\vec{y}(x) = \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \vec{y}^{(\nu)} \tag{3.21}$$

oplossing van (3.20).

Definitie (3.7):

De vectorfunkties $\vec{y}^{(1)}(x)\dots\vec{y}^{(p)}(x)$ heten op een interval $a<x<b$ lineair afhankelijk als er konstanten c_ν $(\nu=1,\dots,p)$ bestaan met $\sum_{\nu=1}^{p} |c_\nu|>0$, zodanig dat:

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \vec{y}^{(\nu)}(x) = 0. \tag{3.22}$$

Bestaan dergelijke konstanten niet, dan heten de vectorfunkties lineair onafhankelijk; of de vectorfunkties heten lineair onafhankelijk als uit (3.22) volgt:

$$c_\nu = 0 \qquad \nu=1,\dots,p.$$

Stelling (3.6):

Laten $\vec{y}^{(\nu)}(x)$ $(\nu=1,\dots,p)$ oplossingen zijn van (3.20) voor $a<x<b$.

Als geldt:

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \vec{y}^{(\nu)}(x_o) = \vec{0} \qquad a < x_o < b$$

dan geldt dit voor alle $x\in(a,b)$.

Bewijs:

$\vec{y}(x) = \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \vec{y}^{(\nu)}(x)$ is ook een oplossing van (3.20) met $\vec{y}(x_o)=\vec{0}$. $\vec{y}(x)=\vec{0}$ is ook oplossing van (3.20). Volgens de eenduidigheidsstelling moet nu gelden:

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \vec{y}^{(\nu)}(x) = \vec{0}.$$

Stelling (3.7):

Laten $\vec{y}^{(\nu)}(x)$ $(\nu=1,\dots,p;\ p>n)$ oplossingen zijn van (3.20) voor $a<x<b$.

De vectoren $\vec{y}^{(\nu)}(x)$ zijn dan lineair afhankelijk.

Bewijs:

Kies $x_o\in(a,b)$.

De vectoren $\vec{y}^{(1)}(x_o)\dots\vec{y}^{(p)}(x_o)$ met n kentallen zijn nu, omdat $p>n$ lineair afhankelijk, d.w.z.:

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \vec{y}^{(\nu)}(x_o) = \vec{0}.$$

Uit de vorige stelling volgt dan:

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \vec{y}^{(\nu)}(x) = \vec{0}.$$

Stelling (3.8):

Zij $A(x)$ kontinu op $a<x<b$. Stelsel (3.20) heeft dan op het interval $a<x<b$ precies n lineair onafhankelijke oplossingen $\vec{y}^{(1)}(x)\ldots\vec{y}^{(n)}(x)$.

Iedere oplossing $\vec{y}(x)$ is te vormen uit een lineaire kombinatie van deze lineair onafhankelijke oplossingen; m.a.w. er bestaan konstante c_ν zodanig dat:

$$\vec{y}(x) = \sum_{p=1}^{n} c_\nu \vec{y}^{(\nu)}(x). \qquad (3.23)$$

Bewijs:

Beschouw de n eenheidsvectoren:

$$\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$$
$$\vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

Deze zijn lineair onafhankelijk. Bepaal vervolgens n oplossingen $\vec{y}^{(\nu)}(x)$ van de differentiaalvergelijking, zodanig dat:

$$\vec{y}^{(\nu)}(x_0) = \vec{e}_\nu \qquad (\nu=1,\ldots,n).$$

Daar er voldaan is aan de voorwaarden van de existentie- en eenduidigheidsstelling bestaan deze oplossingen en zijn eenduidig. Zij zijn lineair onafhankelijk want zij zijn lineair onafhankelijk voor $x=x_0$.

Definitie (3.8):

n lineair onafhankelijke oplossingen van een lineair homogeen stelsel heten een integraal basis of een fundamenteel stelsel.

Toets voor de lineaire onafhankelijkheid van n vectorfunkties.

De n vectorfunkties $\vec{y}^{(1)}(x)\ldots\vec{y}^{(n)}(x)$, kontinu differentieerbaar op (a,b), zijn lineair onafhankelijk als

$$\sum_{p=1}^{n} c_p \vec{y}^{(p)}(x) = 0$$

geen andere oplossingen heeft dan $c_p=0$, $p=1,\ldots,n$. Dit betekent dat voor $x_0 \in (a,b)$ moet gelden:

$$\mathrm{Det}\,|y_i^{(p)}(x_0)| \neq 0. \qquad (3.24)$$

Het oplossen van een beginwaardeprobleem.

Gegeven:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} \qquad \vec{y}(x_o) = \vec{y}^{(o)} = (\eta_1,\ldots,\eta_n)$$

en het fundamenteel stelsel $\vec{y}^{(1)}(x),\ldots,\vec{y}^{(n)}(x)$.

Beschouw

$$\vec{y} = \sum_{p=1}^{n} c_p\, \vec{y}^{(p)}(x).$$

Er moet nu gelden:

$$\vec{y}^{(o)} = \sum_{p=1}^{n} c_p\, \vec{y}^{(p)}(x_o)$$

of per komponent:

$$\eta_i = \sum_{p=1}^{n} c_p\, y_i^{(p)}(x_o) \qquad i=1,\ldots,n. \tag{3.25}$$

Daar voorwaarde (3.24) geldt, kunnen uit dit lineaire stelsel vergelijkingen de konstanten c_p worden opgelost.

Het oplossen van een lineair inhomogeen stelsel differentiaalvergelijkingen.

Gegeven:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x) \qquad \vec{b}(x) = (b_1(x),\ldots,b_n(x)) \tag{3.26}$$

$$\vec{y}(x_o) = \vec{y}^{(o)}$$

en het fundamenteel stelsel $\vec{y}^{(1)}(x)\ldots\vec{y}^{(n)}(x)$ van de homogene vector differentiaalvergelijking.

Wij passen nu op dit stelsel de methode van variatie van konstanten toe, d.w.z. beschouw:

$$\vec{y}(x) = \sum_{p=1}^{n} c_p(x)\, \vec{y}^{(p)}(x).$$

Substitutie in (3.26) levert:

$$\sum_{p=1}^{n} c_p(x)\, \frac{d\vec{y}^{(p)}(x)}{dx} + \sum_{p=1}^{n} \frac{dc_p(x)}{dx}\, \vec{y}^{(p)}(x) = A \sum_{p=1}^{n} c_p(x)\vec{y}^{(p)}(x) + \vec{b}(x),$$

of

$$\sum_{p=1}^{n} c_p(x) \left[\frac{d\vec{y}^{(p)}}{dx} - A\vec{y}^{(p)}(x)\right] + \sum_{p=1}^{n} \frac{dc_p(x)}{dx}\, \vec{y}^{(p)}(x) = \vec{b}(x)$$

en daar $\vec{y}^{(p)}(x)$ oplossingen zijn van het homogene stelsel volgt:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{dc_p(x)}{dx}\, \vec{y}^{(p)}(x) = \vec{b}(x) \tag{3.27}$$

of per komponent:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{dc_p(x)}{dx} y_i^{(p)}(x) = b_i(x) \qquad i=1,\ldots,n. \tag{3.28}$$

Uit stelsel (3.28) kunnen, daar voorwaarde (3.24) geldt:

$$\frac{dc_p(x)}{dx} \qquad (p=1,\ldots,n)$$

opgelost worden.

Wij vinden dan relaties van de vorm:

$$\frac{dc_p(x)}{dx} = \varphi_p(x) \qquad p=1,\ldots,n, \tag{3.29}$$

waaruit c_p onmiddellijk bepaald kan worden.

Definitie (3.9):

De nxn matrix $\Phi(x)$, met als kolommen n lineair onafhankelijke oplossingen $\vec{y}^{\nu}(x)$, $\nu=1,\ldots,n$ van (3.20) heet de fundamentele matrix.

Opmerking.

Als wij de fundamentele matrix zodanig construeren dat geldt: $\Phi(x_o)=I$ (eenheidsmatrix) dan kan de oplossing van (3.20) met beginvoorwaarde $\vec{y}(x_o)=\vec{y}^{(o)}$ geschreven worden als:

$$y(x) = \Phi(x)\vec{y}^{(o)}. \tag{3.30}$$

Door substitutie van (3.30) in (3.20) volgt dat $\Phi(x)$ oplossing is van de matrixvergelijking

$$\frac{d\Phi}{dx} = A\Phi \; ; \qquad \Phi(x_o) = I. \tag{3.31}$$

Het oplossen van een lineair inhomogeen stelsel m.b.v. de fundamentele matrix.

Gegeven de matrix $\Phi(x)$ gedefinieerd door (3.31). Zoek naar analogie van (3.30) oplossingen voor (3.26) van de vorm:

$$y(x) = \Phi(x)\, \vec{u}(x). \tag{3.32}$$

Substitutie van (3.32) in (3.26) levert:

$$\Phi \frac{d\vec{u}}{dx} + \frac{d\Phi}{dx} \vec{u} = A\, \Phi\, \vec{u} + \vec{b}(x),$$

m.b.v. (3.31) volgt:

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = \Phi^{-1}(x)\, \vec{b}(x) \qquad \vec{u}(x_o) = \vec{y}^{(o)}. \tag{3.33}$$

Integratie van (3.33) levert:

$$\vec{u} = \vec{y}^{(o)} + \int_{x_o}^{x} \Phi^{-1}(s)\, \vec{b}(s)ds.$$

(3.26) heeft dus als algemene oplossing:

$$y(x) = \Phi(x)\vec{y}^{(o)} + \int_{x_o}^{x} \Phi(x)\Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)ds \qquad (3.34)$$

mits de matrix $\Phi^{-1}(s)$ bestaat ($\Phi(x)$ moet dan niet-singulier zijn).

Definitie (3.10):

Gegeven:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y};\; A(x) = \{a_{ij}(x)\}; \qquad \vec{y} = (y_1,\ldots,y_n)$$

$x=x_o$ heet een regulier punt als alle $a_{ij}(x)$ in de omgeving van $x=x_o$ in een Taylorreeks te ontwikkelen zijn met konvergentiestraal $\rho>0$.

Stelling (3.9):

Gegeven:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)y_j \qquad i=1,\ldots,N$$

$$y_i(x_o) = \gamma_i.$$

In de omgeving van een regulier punt konvergeren de Taylorreeksen

$$y_i(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \alpha_n^{(i)} (x-x_o)^n. \qquad (3.35)$$

De konvergentiestraal is niet kleiner dan de konvergentiestraal van de Taylorreeksen voor a_{ij}.

Bewijs:

Stel $x_o=0$. Ga na dat dit niet ten koste gaat van de algemeenheid van de stelling.

De Taylor-coëfficienten voor

$$y_i(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \alpha_n^{(i)} x^n \qquad (3.36)$$

zijn:

$$\alpha_n^{(i)} = \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n y_i}{dx^n}\right|_{x=o}$$

nu geldt:

$$\left.\frac{dy_i}{dx}\right|_{x=o} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(0)\gamma_j$$

$$\left.\frac{d^2y_i}{dx^2}\right|_{x=o} = \sum_{j=1}^{N} \left\{a_{ij}(0) \left.\frac{dy_j}{dx}\right|_{x=o} + \left.\frac{da_{ij}}{dx}\right|_{x=o} \gamma_j \right\} \qquad (3.37)$$

$\vdots$

etc.

Afschatten van (3.37) levert:

$$\left|\frac{dy_i}{dx}\bigg|_{x=o}\right| \leqq \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}(0)|\,|\gamma_j|.$$

Beschouw nu het majorerende stelsel:

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(x)\,\eta_j \qquad i=1,\ldots,N \qquad (3.38)$$

$$\eta_i(0) = |\gamma_i|$$

met als oplossingen:

$$\eta_i(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \beta_n^{(i)} x^n. \qquad (3.39)$$

$$\beta_n^{(i)} = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n\eta_i}{dx^n}\bigg|_{x=o}$$

$$\frac{d\eta_i}{dx}\bigg|_{x=o} = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(0)\,|\gamma_j|$$

$$\frac{d^2\eta_i}{dx^2}\bigg|_{x=o} = \sum_{j=1}^{N} \left\{ b_{ij}(0)\,\frac{d\eta_j}{dx}\bigg|_{x=o} + \frac{d\,b_{ij}}{dx}\bigg|_{x=o} |\gamma_j| \right\}.$$

etc.

Stel nu:

$$b_{ij}(0) > |a_{ij}(0)|;\quad \frac{d^n b_{ij}}{dx^n}\bigg|_{x=o} > \left|\frac{d^n a_{ij}}{dx^n}\bigg|_{x=o}\right| . \qquad (3.40)$$

Dan volgt:

$$\frac{d\eta_i}{dx}\bigg|_{x=o} = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(0)\,|\gamma_j| > \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(0)\gamma_j > \left|\frac{dy_i}{dx}\bigg|_{x=o}\right|$$

of

$$\left|\frac{dy_i}{dx}\bigg|_{x=o}\right| < \frac{d\eta_i}{dx}\bigg|_{x=o} \qquad i=1,\ldots,N$$

en met volledige inductie:

$$\left|\frac{d^n y_i}{dx^n}\bigg|_{x=o}\right| < \frac{d^n\eta_i}{dx^n}\bigg|_{x=o} \qquad n=1,\ldots$$

Er volgt dus dat (3.39) machtreeks (3.36) absoluut majoreert.
De vraag is nu of een stelsel als (3.38) bestaat.

Zij

$$a_{ij}(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_{ij}^{(n)} x^n \quad \text{konvergeert voor} \quad |x| < \rho \, . \tag{3.41}$$

Dit betekent dat moet gelden (wortelkenmerk)

$$|a_{ij}^{(n)}| < \frac{M}{\rho^n} \qquad (M = \text{konstante}).$$

Stel nu:

$$b_{ij}(x) = \frac{M}{1-\frac{x}{\rho}} = M \sum_{n=o}^{\infty} (\frac{x}{\rho})^n \qquad \text{voor} \quad |x| < \rho \tag{3.42}$$

en dus:

$$\left.\frac{db_{ij}}{dx^n}\right|_{x=o} = n! \, \frac{M}{\rho^n} \, .$$

Uit (3.41) volgt:

$$\left.\frac{d^n a_{ij}(x)}{dx^n}\right|_{x=o} = n! \, a_{ij}^{(n)}. \tag{3.43}$$

Uit (3.42) en (3.43) volgt dat voldaan is aan (3.40); m.a.w. wij hebben het majorerende stelsel gekonstrueerd:

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \frac{M}{1-\frac{x}{\rho}} \sum_{j=1}^{N} \eta_j \qquad i=1,\ldots,N \tag{3.44}$$

Stel

$$\sum_{j=1}^{N} \eta_j = \Psi.$$

Dan volgt:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{MN}{1-\frac{x}{\rho}} \Psi \qquad \text{of} \quad \Psi = \Psi_o(1 - \frac{x}{\rho})^{-\rho MN}. \tag{3.45}$$

Substitutie van (3.45) in (3.44) levert:

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \frac{M}{1-\frac{x}{\rho}} \Psi = \Psi_o \frac{M}{1-\frac{x}{\rho}} (1 - \frac{x}{\rho})^{-\rho MN}$$

of na integratie:

$$\eta_i = \frac{\Psi_o}{N} (1 - \frac{x}{\rho})^{-\rho MN} + |\gamma_i| - \frac{\Psi_o}{N} \, .$$

Hieruit volgt dat voor $|x|<\rho$ elke η_i in een konvergente machtreeks te ontwikkelen is. Elke machtreeks voor η_i majoreert absoluut de corresponderende Taylor-reeks voor y_i. De machtreeksen voor y_i konvergeren dus absoluut terwijl de konvergentiestraal niet kleiner is dan ρ. ρ is de konvergentiestraal waarbinnen de machtreeksontwikkelingen voor a_{ij} konvergeren.

Lineaire stelsels met konstante coëfficienten.

Wij beschouwen het volgende lineaire homogene stelsel met konstante coëfficienten:

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots a_{1n}y_n$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots a_{nn}y_n,$$

of in vectorvorm:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} \qquad (3.46)$$

waarin A een matrix is met elementen a_{ij} en $\vec{y}$ de vector $\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$.

Wij zoeken naar oplossingen van de vorm:

$$\vec{y} = \vec{c}\, e^{\lambda x} \qquad (3.47)$$

waarin $\vec{c}=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ een konstante vector is.

Substitutie van (3.47) in (3.46) levert:

$$(A - \lambda I)\vec{c}\, e^{\lambda x} = \vec{0} \qquad (3.48)$$

waarin I de eenheidsmatrix is.

Uitschrijven van $(A-\lambda I)\vec{c}=\vec{0}$ levert:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)c_1 + a_{12}c_2 + \dots a_{1n}c_n &= 0 \\ a_{21}c_1 + (a_{22}-\lambda)c_2 + \dots a_{2n}c_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 \quad + \dots (a_{nn}-\lambda)c_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.49)$$

(3.49) is een stelsel lineaire homogene vergelijkingen met onbekenden $c_1,\dots,c_n$. Dit stelsel heeft alleen dan oplossingen die ongelijk zijn aan de nul oplossing als de coëfficienten-determinant gelijk is aan nul:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23} \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots\dots\dots\dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.50)$$

(3.50) is een n-de graads vergelijking in λ en heet de karakteristieke vergelijking.

De vergelijking heeft n wortels λ_p $p=1,\dots,n$, die de eigenwaarden heten.

Wij onderscheiden twee gevallen:

I. Alle n wortels van (3.50) zijn verschillend. Voor iedere λ_p kunnen wij stelsel (3.49) oplossen. De rang van de matrix $(A-\lambda I)$ is gelijk aan $(n-1)$ dus voor $\lambda=\lambda_p$ zijn $c_1^{(p)},\dots,c_n^{(p)}$ op een multiplikatieve konstante na bepaald.

Stelling (3.10):

De vectorfunkties $\vec{y}^{(p)}=\vec{c}^{(p)}e^{\lambda_p x}$, $p=1,\dots,n$, die oplossingen zijn van (3.46) vormen een fundamenteel stelsel.

Bewijs:

Wij moeten dus bewijzen dat de n vektorfunkties $\vec{y}^{(p)}$ lineair onafhankelijk zijn, m.a.w.

Uit $\sum_{p=1}^{n} \beta_p\, \vec{c}^{(p)}\, e^{\lambda_p x} = \vec{0}$ moet volgen $\beta_p = 0 \qquad p=1,\dots,n.$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{p=1}^{n} \beta_p\, \vec{c}^{(p)}\, e^{\lambda_p x} = \vec{0}. \\ \text{Uit herhaalde differentiatie volgt:} \\ \sum_{p=1}^{n} \beta_p\, \vec{c}^{(p)}\, \lambda_p\, e^{\lambda_p x} = \vec{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{p=1}^{n} \beta_p\, \vec{c}^{(p)}\, \lambda_p^{n-1}\, e^{\lambda_p x} = \vec{0}. \end{array}\right\} \qquad (3.51)$$

De matrix van Vandermonde S is gedefinieerd door:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \lambda^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Stelsel (3.51) is nu te schrijven als:

$$S \cdot \begin{pmatrix} \vec{c}^{(1)} & \beta_1 & e^{\lambda_1 x} \\ \vec{c}^{(2)} & \beta_2 & e^{\lambda_2 x} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \vec{c}^{(n)} & \beta_n & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{0} \end{pmatrix} \qquad (3.52)$$

Daar $|S| \neq 0$ volgt:

$$\vec{c}^{(p)}\, \beta_p\, e^{\lambda_p x} = \vec{0} \qquad p=1,\dots,n$$

en omdat $\vec{c}^{(p)} \neq \vec{0}$ volgt $\beta_p = 0$ $\quad p=1,\ldots,n.$

q.e.d.

Als alle eigenwaarden verschillend zijn, luidt de algemene oplossing van (3.46):

$$\vec{y} = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p \, \vec{c}^{(p)} \, e^{\lambda_p x} \tag{3.53}$$

waarin α_p willekeurige konstanten zijn.

II. Niet alle wortels van (3.50) zijn verschillend.

Met behulp van bovenstaande methode kunnen wij slechts zoveel lineair onafhankelijke oplossingen konstrueren als er verschillende eigenwaarden zijn.

Definitie (3.11):

De multipliciteit van een eigenwaarde is een getal dat aangeeft hoeveel maal die eigenwaarde oplossing is van de karakteristieke vergelijking.

Stelling (3.11):

Zij λ_o een eigenwaarde met multipliciteit s.

Dan bestaan er s lineair onafhankelijke oplossingen van stelsel (3.46) van de gedaante:

$$\vec{y}^{(h)}(x) = \vec{P}^{(h)}(x)\, e^{\lambda_o x} \qquad h=1,\ldots,s \tag{3.54}$$

waarin de komponenten $P_i^{(h)}(x)$ van $\vec{P}^{(h)}(x)$ veeltermen zijn waarvan de graad hoogstens h-1 is.

Bewijs:

Zie Kamke blz. 148.

Stelling (3.12):

Laten $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ verschillende eigenwaarden zijn van matrix A met bijbehorende multipliciteiten $s_1,\ldots,s_r$.

Laten

$$\vec{P}_\rho^{(h)}(x)\, e^{\lambda_\rho x} \qquad h=1,\ldots,s_\rho \tag{3.55}$$

de bij λ_ρ $(\rho=1,\ldots,r)$ behorende lineair onafhankelijke oplossingsvectoren zijn van (3.46).

Voor $\rho=1,\ldots,r$ verkrijgen wij dus $s_1+s_2\ldots+s_r=n$ oplossingsvectoren (3.55).

Deze vectoren vormen een fundamenteel stelsel.

Bewijs:

Zie Kamke blz. 151.

Voorbeeld:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}; \quad \vec{y} = (y_1,y_2); \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Karakteristieke vergelijking: $(\lambda+1)^2=1 \to \lambda_{1,2}=-1$.

Stel 1^e oplossing: $\vec{y} = \vec{a}\, e^{-x}$ $\quad \vec{a} = (a_1,a_2)$

$(3.49) \to \vec{a} = \alpha(1,2)$.

Stel 2^e oplossing: $\vec{y} = (\vec{b}+\vec{c}x)e^{-x}$ $\quad \vec{b} = (b_1,b_2)$ $\quad \vec{c} = (c_1,c_2)$,

Substitutie in differentiaalvergelijking levert:

$$\vec{c} - \vec{b} - A\vec{b} - (\vec{c}+A\vec{c})x = \vec{0}.$$

Deze relatie moet gelden voor iedere waarde van x. Dit betekent:

1) $\vec{c} + A\vec{c} = \vec{0} \to (I+A)\vec{c} = \vec{0} \to \vec{c} = \gamma(1,2)$;
2) $\vec{c} = (I+A)\vec{b} \to \vec{b} = (\beta,\ 2\beta-\gamma)$.

Als algemene oplossing vinden wij:

$$\vec{y} = \alpha(1,2)e^{-x} + (\beta,2\beta-\gamma)e^{-x} + \gamma(1,2)xe^{-x}$$

of als $\alpha+\beta= \bar{\gamma}$:

$$\vec{y} = \bar{\gamma}(1,2)e^{-x} + \gamma(x,2x-1)e^{-x}.$$

De fundamentele matrix van stelsel (3.46).

Zij gegeven:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}; \quad \vec{y}(0) = \vec{c}. \qquad (3.56)$$

Wij onderzoeken de vorm van de matrix $\Phi(x)$ in $\vec{y}=\Phi\vec{c}$ en gedefinieerd door:

$$\frac{d\Phi}{dx} = A\Phi\ ; \quad \Phi(0) = I. \qquad (3.57)$$

De reeks:

$$I + \frac{Ax}{1!} + \ldots \frac{A^m x^m}{m!} + \ldots$$

konvergeert gelijkmatig in x op ieder interval en definieert een matrix $Z(x)$.

De afgeleide van $Z(x)$ naar x is:

$$\frac{dZ}{dx} = A + \ldots \frac{A^m x^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots = A\left[I + \ldots \frac{A^{m-1}x^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots\right] = AZ.$$

Daar $Z(0)=I$ volgt dat $Z(x)\equiv\Phi(x)$.

De matrix $\Phi(x)$ schrijven wij als:

$$\Phi(x) = e^{Ax}. \qquad (3.58)$$

Het oplossen van een inhomogeen probleem m.b.v. de fundamentele matrix.

Beschouw de beide matrices:

$$\Phi(x)\ \Phi(s) \quad \text{en} \quad \Phi(x+s).$$

Beide voldoen aan:

$$\frac{dZ}{dx} = AZ \qquad Z(0) = \Phi(s).$$

Volgens de eenduidigheidsstelling geldt dus:

$$\Phi(x) \cdot \Phi(s) = \Phi(x+s) \tag{3.59}$$

hetgeen overeenstemt met:

$$e^{Ax} \cdot e^{As} = e^{A(x+s)}.$$

Uit (3.59) volgt: (stel x=-s)

$$I = \Phi(x) \cdot \Phi(-x)$$

of

$$\Phi^{-1}(x) = \Phi(-x). \tag{3.60}$$

Beschouw nu het inhomogene beginwaarde-probleem:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{b}(x) \qquad \vec{y}(0) = \vec{y}^{(o)}. \tag{3.61}$$

Hiervan luidt de oplossing m.b.v. (3.34), (3.60) en (3.59):

$$\vec{y} = \Phi(x)\vec{y}^{(o)} + \int_0^x \Phi(x-s)\vec{b}(s)dx \tag{3.62}$$

Voorbeeld:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \qquad \vec{y}(x) = (y_1, y_2)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 + f(x) \qquad \vec{y}(0) = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Dit stelsel kan geschreven worden als:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{F}(x) \quad \text{met } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } \vec{F}(x) = (0, f(x)).$$

Het fundamenteel stelsel vectoren van het homogene stelsel is:

$$\vec{y}^{(1)}(x) = (\cos x, -\sin x) \quad \text{en} \quad \vec{y}^{(2)}(x) = (\sin x, \cos x)$$

(kontroleer voorwaarde (3.24)).

Beschouw nu:

$$\vec{y}(x) = c_1(x)\, \vec{y}^{(1)}x + c_2(x)\, \vec{y}^{(2)}(x)$$

of in komponenten:

$$y_1 = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

$$y_2 = -c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x.$$

Substitutie in levert:

$$\frac{dc_1}{dx}\cos x + \frac{dc_2}{dx}\sin x = 0$$

$$-\frac{dc_1}{dx}\sin x + \frac{dc_2}{dx}\cos x = f(x)$$

waaruit volgt:

$$\frac{dc_1}{dx} = -f(x)\sin x \rightarrow c_1 = -\int_0^x f(\xi)\sin\xi\, d\xi + \alpha_1$$

$$\frac{dc_2}{dx} = f(x)\cos x \rightarrow c_2 = \int_0^x f(\xi)\cos\xi\, d\xi + \alpha_2.$$

Wij vinden dus als oplossing:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1\cos x + \alpha_2\sin x + \sin x\int_0^x f(\xi)\cos\xi\, d\xi - \cos x\int_0^x f(\xi)\sin\xi\, d\xi \\ y_2 &= -\alpha_1\sin x + \alpha_2\cos x + \cos x\int_0^x f(\xi)\cos\xi\, d\xi + \sin x\int_0^x f(\xi)\sin\xi\, d\xi \end{aligned}\right\}$$

of

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1\cos x + \alpha_2\sin x + \int_0^x f(\xi)\sin(x-\xi)d\xi \\ y_2 &= -\alpha_1\sin x + \alpha_2\cos x + \int_0^x f(\xi)\cos(x-\xi)d\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (3.63)$$

De algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking luidt kennelijk

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \phi(x)\vec{y}(0).$$

$\phi(x)$ is een matrix waarvoor geldt:

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De kolomvectoren zijn de lineair onafhankelijke oplossingen van het homogene stelsel. Bij willekeurige beginvoorwaarde α_1 en α_2 is de bijbehorende oplossing onmiddellijk te berekenen.

Toon aan dat (3.63) nu te schrijven is als:

$$\vec{y}(x) = \phi(x)\,\vec{y}(0) + \int_0^x \phi(x-\xi)\,\vec{F}(\xi)d\xi.$$

Hoofdstuk 4: Differentiaalvergelijkingen van de n-de orde.

Wij beschouwen alleen expliciete differentiaalvergelijkingen van de n-de orde:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) \qquad (4.1)$$

met beginvoorwaarde:

$$x = x_o; \quad y(x_o) = \eta_1 \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \eta_{m+1}, \qquad m=1,\dots,n-1$$

waarin $\eta_1 \dots \eta_{m+1}$ konstanten zijn.

(4.1) luidt in vectorvorm:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{F}(\vec{y},x) \qquad (4.2)$$

waarin:

$$\vec{y} = (y_1,y_2,\dots,y_n) \quad \vec{F}(\vec{y},x) = (y_2,y_3,\dots,y_n,f(x,y_1,\dots,y_n))$$

$$y_1 = y; \quad y_{m+1} = \frac{d^m y}{dx^m} \qquad m=1,\dots,n-1$$

met beginvoorwaarde: $\vec{y}(x_o) = \vec{\eta} = (\eta_1,\dots,\eta_n)$.

De theorie voor de n-de orde differentiaalvergelijkingen volgt dus uit de theorie voor stelsels van n eerste orde differentiaalvergelijkingen. Voor toepassingen is het vaak niet erg efficiënt de n-de orde differentiaalvergelijkingen om te zetten in een stelsel.

Opgave:

Formuleer zelf de existentie- en eenduidigheidsstelling voor (4.1). Formuleer ook de existentiestelling voor analytische funkties op blz. 15 voor (4.1).

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de n-de orde.

De lineaire differentiaalvergelijking van de n-de orde

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots f_o y = g(x) \qquad (4.3)$$

is na invoering van de differentiaal operator

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + f_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots f_o$$

te schrijven als:

$$Ly = g(x). \qquad (4.4)$$

Definitie (4.1):

Als $g(x) \equiv 0$ dan heet (4.3) homogeen.

Als wij (4.3) als stelsel beschouwen, kunnen wij de stelling (3.8) op blz. 18 direkt toepassen:

Stelling (4.1):
Laten $f_{n-1}(x),\dots,f_o(x)$ kontinue funkties zijn in x op (a,b).
$Ly=0$ heeft dan op het interval $a<x<b$ precies n lineair onafhankelijke oplossingen $\varphi_p(x)$ $p=1,\dots,n$.

Bewijs:
Ga zelf na.

Wij zullen een voorwaarde afleiden waaraan de n oplossingen $\varphi_p(x)$ moeten voldoen.
Stel:

$$\vec{y} = (y_1,y_2,\dots,y_n) \qquad y = y_1; \quad \frac{d^{j-1}y}{dx^{j-1}} = y_j \qquad j=2,\dots,n.$$

Voor het stelsel zijn:

$$\begin{aligned} \vec{y}^{(1)} &= (\varphi_1(x), \frac{d\varphi_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}\varphi_1}{dx^n}) \\ \vec{y}^{(2)} &= (\varphi_2(x), \frac{d\varphi_2}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}\varphi_2}{dx^n}) \\ &\vdots \\ \vec{y}^{(n)} &= (\varphi_n(x), \frac{d\varphi_n}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}\varphi_n}{dx^{n-1}}) \end{aligned} \qquad (4.5)$$

de n lineair onafhankelijke oplossingen.
Uit

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{y}^{(i)}(x) = \vec{0} \qquad (4.6)$$

volgt $\beta_i=0$ $i=1,\dots,n$.
(4.6) kan opgevat worden als een stelsel van n lineaire homogene vergelijkingen in β_i. Als wij voor β_i uitsluitend nul oplossing willen hebben, geldt:

$$W(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \dots & \varphi_n \\ \frac{d\varphi_1}{dx} & \frac{d\varphi_2}{dx} & \dots & \frac{d\varphi_n}{dx} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-1}\varphi_1}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}\varphi_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}\varphi_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.7)$$

Definitie (4.2):
$W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ heet de determinant van Wronski of de Wronskiaan.

Opmerking:

Een direkt gevolg van stelling (3.6) is dat als W=0 voor $x=x_o \in (a,b)$ dan is $W \equiv 0$ op (a,b).

Stelling (4.2):

Zij $\varphi(x)$ een oplossing van $Ly=g(x)$. $\varphi_i(x)$ $i=1,\dots,n$ zijn de lineair onafhankelijke oplossingen van $Ly=0$.

De algemene oplossing van $Ly=g(x)$ luidt:

$$y = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) \tag{4.8}$$

waarin α_i $i=1,\dots,n$ konstanten zijn.

Bewijs:

Ga zelf na.

Het oplossen van een beginwaardeprobleem.

Gegeven de beginvoorwaarde:

$$x = x_o; \quad y(x_o) = \eta_1; \quad \frac{d^i y}{dx^i} = \eta_{i+1} \qquad i=1,\dots,n-1.$$

Uit (4.8) kunnen wij een lineair inhomogeen stelsel algebraische vergelijkingen afleiden. De algemene oplossingen hiervan $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ bestaat dan en slechts dan als de coëfficienten determinant van het homogene stelsel $\neq 0$, hetgeen overeenkomt met voorwaarde (4.7).

Verlaging van de orde van een lineaire differentiaalvergelijking.

Wij beschouwen vergelijking (4.4).

Als van de homogene differentiaalvergelijking bijv. door raden, een oplossing bekend is, kan de differentiaalvergelijking voor de overige (n-1) lineair onafhankelijke oplossingen tot de (n-1)-orde gereduceerd worden.

Laat $y=y_1(x)$ oplossing zijn van $Ly=0$.

Beschouw voor de algemene oplossing van (4.4) de transformatie:

$$y(x) = y_1(x).\varphi(x). \tag{4.9}$$

n maal differentiëren van (4.9) levert:

$$y' = y_1'\varphi + y_1\varphi'$$

$$y'' = y_1''\varphi + \binom{2}{1}y_1'\varphi' + y_1\varphi''$$

$$y''' = y_1'''\varphi + \binom{3}{2}y_1''\varphi' + \binom{3}{2}y_1'\varphi'' + y_1\varphi'''$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)}\varphi + \binom{n}{1}y_1^{(n-1)}\varphi' + \dots \binom{n}{n-1}y_1'\varphi^{(n-1)} + y_1\varphi^{(n)}.$$

Substitutie hiervan in (4.4) levert:

$$\varphi[Ly_1] + \varphi' \left[\binom{n}{1} y_1^{(n-1)} + \dots \binom{2}{1} f_2 y_1' + f_o y_1\right] + \varphi''[\dots] + \dots \varphi^{(n)} y_1 = g(x).$$

Daar $Ly_1=0$ volgt met $\varphi'=\Psi$:

$$\Psi^{(n-1)} + F_{n-2}\Psi^{(n-2)} + \dots F_o\Psi = \frac{g(x)}{y_1(x)} . \qquad (4.10)$$

Voor Ψ is dit een vergelijking van de orde (n-1).

Toepassing op een tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking.

De algemene vorm van een tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking luidt:

$$y'' + f_1(x)y' + f_o(x)y = h(x). \qquad (4.11)$$

Stel dat y_1 en y_2 twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking (4.11). Er geldt dan:

$$[y_1'' + f_1(x)y_1' + f_o(x)y_1]\, y_2 = 0$$

$$[y_2'' + f_1(x)y_2' + f_o(x)y_2]\, y_1 = 0.$$

Aftrekken der beide vergelijkingen levert:

$$[y_2y_1'' - y_1y_2''] + f_1(x)\,[y_1'y_2 - y_2'y_1] = 0$$

of

$$\frac{dw}{dx} + f_1(x)w = 0$$

waarin

$$w = y_1y_2' - y_2y_1'. \qquad (4.12)$$

De determinant van Wronski is dus gelijk aan:

$$w = c\exp(-\int f_1(x)dx)$$

waarin c een konstante is.

Tevens volgt uit (4.12):

$$w = y_1^2 \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{y_2}{y_1}\right] . \qquad (4.13)$$

De algemene vorm (4.11) is m.b.v. de Liouville-transformatie te herleiden tot:

$$y'' + F(x)y = g(x). \qquad (4.14)$$

Stel:

$$y = \varphi_o . \Psi.$$

Substitutie in (4.11) levert:

$$\varphi_o\Psi'' + (f_1\varphi_o + 2\varphi_o')\Psi' + (\varphi_o'' + f_o\varphi_o + \varphi_o' f_1)\Psi = h(x).$$

Kies nu:

$$f_1\varphi_o + 2\varphi_o' = 0 \rightarrow \varphi_o = \exp(-\tfrac{1}{2}\int f_1(x)dx).$$

Voor Ψ verkrijgen wij nu de volgende differentiaalvergelijking:

$$\Psi'' + \left[\frac{\varphi_o''}{\varphi_o} + \frac{\varphi_o'}{\varphi_o} f_1 + f_o\right]\Psi = \frac{h(x)}{\varphi_o(x)} .$$

<u>Verlaging van de orde.</u>

Stel y_1 is een oplossing van de homogene vergelijking:

$$y_1'' + F(x)y_1 = 0.$$

Beschouw de transformatie: $y(x)=y_1(x)\varphi(x)$.

Substitutie in (4.14) levert:

$$y_1\varphi'' + 2y_1'\varphi' = g(x)$$

of

$$\frac{d}{dx} y_1^2\varphi' = g(x)\ y_1(x)$$

waaruit volgt:

$$\varphi = \int^x \frac{1}{y_1^2(x')} \int^{x'} y_1(\xi)g(\xi)d\xi\ dx' + c_2\int^x \frac{1}{y_1^2(\xi)}d\xi + c_1. \qquad (4.15)$$

Uit (4.13) volgt:

$$\frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{w}\frac{d}{dx}\left[\frac{y_2}{y_1}\right]. \qquad (4.16)$$

Substitutie van (4.16) in (4.15) levert:

$$\varphi = \frac{1}{w}\int^x \frac{d}{dx'}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\int^{x'} y_1(\xi)g(\xi)d\xi\ dx' + c_2\frac{y_2}{y_1} + c_1 =$$

$$= \frac{1}{w}\left[\frac{y_2}{y_1}\int^x y_1(\xi)g(\xi)d\xi - \int^x y_2(\xi)g(\xi)d\xi\right] + c_2\frac{y_2}{y_1} + c_1$$

of met $y=y_1\varphi$:

$$y = \frac{1}{w}\int^x \left[y_2(x)y_1(\xi) - y_1(x)y_2(\xi)\right] g(\xi)d\xi + c_2y_2 + c_1y_1. \qquad (4.17)$$

(4.17) is dus de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking (4.11) waarin y_1 en y_2 twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking.

<u>Konstruktie van oplossingen van een n-de orde lineaire differentiaalvergelijking met konstante coëfficienten.</u>

Wij beschouwen:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots a_oy = 0 \qquad (4.18)$$

waarin a_i $(i=0,\dots,n-1)$ konstanten zijn.

Naar analogie met stelsels stellen wij:

$$y = e^{\lambda x}. \tag{4.19}$$

Er volgt:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_o = 0. \tag{4.20}$$

Deze karakteristieke vergelijking heeft precies n wortels λ_i $(i=1,\dots,n)$. Zijn deze wortels verschillend dan hebben wij n lineair onafhankelijke oplossingen van (4.18).

Voor het geval dat er samenvallende wortels zijn, geldt er een analoge stelling als bij stelsels.
Wij vermelden eerst:

Stelling (4.3):
Als een veelterm $P_n(x)$ voor $x=x_o$ een nulpunt heeft met multipliciteit s dan hebben ook de afgeleiden:

$$P_n'(x),\ P_n''(x)\ \dots\ P_n^{(s-1)}(x)$$

een nulpunt voor $x=x_o$.

Bewijs:
Ga zelf na.

Stelling (4.4):
Zij λ_o een wortel van (4.20) met multipliciteit s. Dan bestaan er s lineair onafhankelijke oplossingen van (4.18) van de vorm:

$$y_h = P_{h-1}(x)e^{\lambda_o x} \qquad h=1,2,\dots,s$$

waarin $P_{h-1}(x)$ een veelterm is hoogstens van de graad h-1,

Bewijs:
Voer in de operator: $L \equiv \dfrac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \dots a_o.$
Er geldt nu:

$$L\, e^{\lambda x} = e^{\lambda x} P_n(\lambda).$$

Differentiatie naar λ levert:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L\, e^{\lambda x} = x\, e^{\lambda x} P_n(\lambda) + e^{\lambda x} P_n'(\lambda)$$

ook geldt:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L\, e^{\lambda x} = L \frac{\partial}{\partial\lambda} e^{\lambda x} = L\, x\, e^{\lambda x}$$

waaruit volgt:

$$L\, x\, e^{\lambda x} = \left[x\, P_n(\lambda) + P_n'(\lambda)\right] e^{\lambda x}.$$

Doorgaande differentiatie naar λ levert achtereenvolgens:

$$L\, x^2\, e^{\lambda x} = \left[x^2 P_n(\lambda) + 2x\, P_n'(\lambda) + P_n''(\lambda) \right] e^{\lambda x}$$

$$L\, x^3\, e^{\lambda x} = \left[x^3 P_n(\lambda) + 3x^2 P_n'(\lambda) + 3x\, P_n''(\lambda) + P_n'''(\lambda) \right] e^{\lambda x}$$

$$L\, x^{s-1}\, e^{\lambda x} = \left[x^{s-1}\, P_n(\lambda) + \ldots\, P_n^{(s-1)}(\lambda) \right].$$

Alle rechterleden zijn identiek nul voor $\lambda=\lambda_o$ daar λ_o s-voudige wortel is van de karakteristieke vergelijking $P_n(\lambda)=0$. Hieruit volgt:

$$L\, e^{\lambda_o x} = 0,\ L\, x\, e^{\lambda_o x} = 0,\ L\, x^2\, e^{\lambda_o x} = 0,\ \ldots\ L\, x^{s-1}\, e^{\lambda_o x} = 0.$$

Dit betekent dat derhalve $e^{\lambda_o x}$ ook

$$x\, e^{\lambda_o x},\ x^2\, e^{\lambda_o x} \ldots\ x^{s-1}\, e^{\lambda_o x}$$

oplossingen zijn van (4.20).

Met behulp van de determinant van Wronski kan bewezen worden dat de oplossingen lineair onafhankelijk zijn.

Voorbeeld:

$$y'' + a_1 y' + a_o y = 0$$

karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_o = 0$.

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2} \left[-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_o} \right].$$

1) Stel $a_1^2 > 4a_o$ $\lambda_{1,2}$ reëel, oplossing luidt:

$$y = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x}.$$

2) $a_1^2 < 4a_o$; Stel $-a_1^2+4a_o=\omega^2$. Oplossing luidt:

$$y = c_1\, e^{-\frac{1}{2}a_1 x - i\omega x} + c_2\, e^{-\frac{1}{2}a_1 x + i\omega x}.$$

Stel $c_1 = b_1 + i\, b_2$; $c_2 = b_1 - i\, b_2$. volgt:

$$y = e^{-\frac{1}{2}a_1 x} \left\{ 2b_1 \cos\omega x + 2b_2 \sin\omega x \right\}.$$

3) $a_1^2 = 4a_o$. Oplossing luidt:

$$y = c_1\, e^{-\frac{1}{2}a_1 x} + c_2\, x\, e^{-\frac{1}{2}a_1 x}.$$

Het bepalen van oplossingen van lineaire differentiaalvergelijkingen in de vorm van machtreeksen.

Met behulp van de iteratiemethode van Picard kunnen wij twee lineair onafhankelijke oplossingen van

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

konstrueren in de vorm:

$$y_1 = x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$y_2 = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}.$$

Opgave:

Bewijs dat deze oplossingen lineair onafhankelijk zijn. (Bepaal de determinant van Wronski voor een zekere waarde van x.)

Deze machtreeksen zijn gelijk aan de elementaire transcedente funkties $y_1=\sin x$ en $y_2=\cos x$.

Het is meestal niet mogelijk machtreeksen, die oplossingen zijn van differentiaalvergelijkingen te herleiden tot elementaire funkties. Vele van deze machtreeksen heeft men namen gegeven; vaak worden deze machtreeksen ook elementaire funkties genoemd. Bijvoorbeeld:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0 \qquad (4.21)$$

met als oplossingen de funkties van Airy.

Veronderstel:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Substitutie in (4.21) levert:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

of

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+2)(m+1)x^m - \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^m = 0$$

waaruit:

$$2a_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{a_{m+2} (m+2)(m+1) - a_{m-1}\right\} x^m = 0.$$

Deze machtreeks is dan en slechts dan gelijk aan nul als iedere coëfficient gelijk nul is:

$$a_2 = 0; \; a_{m+2} (m+1)(m+2) - a_{m-1} = 0 \qquad m \geqq 1. \qquad (4.22)$$

Uit deze recurrente betrekking volgt:

$$a_2 = a_5 = a_8 = \dots a_{3n-1} = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{2.3} a_o \qquad a_4 = \frac{1}{3.4} a_1$$

$$a_6 = \frac{1}{2.3.5.6} a_o \qquad a_7 = \frac{1}{3.4.6.7} a_1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{3n} = \frac{1}{2\dots 3n} a_o \qquad a_{3n+1} = \frac{1}{3\dots(3n+1)} a_1 \qquad n=1,\dots$$

a_o en a_1 zijn willekeurige konstanten.

Als algemene oplossing vinden wij:

$$y = a_o \sum_{n=o}^{\infty} \alpha_n x^{3n} + a_1 \sum_{n=o}^{\infty} \beta_n x^{3n+1}. \qquad (4.23)$$

Uit (4.22) volgt:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{a_{n+3}}{a_n} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{a_{n+3}}{a_n} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} .$$

Volgens het kenmerk van d'Alembert konvergeren beide machtreeksen voor alle x. Konvergente machtreeksen mogen term voor term worden gedifferentieerd. Achteraf blijkt dat het gerechtvaardigd was (4.23) algemene oplossing te noemen van (4.21). Het konvergentie bewijs is in dit bijzondere geval eenvoudig te geven omdat (4.22) toevalligerwijze van zeer eenvoudige gedaante is.

Algemener:

Gegeven:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0. \qquad (4.24)$$

Onder welke voorwaarden is de algemene oplossing van (4.24) te schrijven als een konvergente machtreeks in de omgeving van $x=x_o$. Wat is de konvergentiestraal? Pas stelling (3.9) toe op differentiaalvergelijking (4.24).

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met singuliere punten.

Wij beschouwen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P(x)}{R(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{Q(x)}{R(x)} y = 0 \qquad (4.25)$$

waarin P(x), Q(x) en R(x) kontinue funkties op $|x|<a$.

Definitie (4.3):

$x=0$ is voor (4.25) een singulier punt als $R(0)=0$ en $P(0)\neq 0$ $Q(0)\neq 0$.

Stel $\frac{P(x)}{R(x)} = p(x)$ en $\frac{Q(x)}{R(x)} = q(x)$.

Opmerking:

$p(x)$ en $q(x)$ zijn niet kontinu voor $x=0$; er wordt dan niet voldaan aan de eisen van de existentiestelling. Wij kunnen niet verwachten oplossingen te verkrijgen van de differentiaalvergelijking met willekeurige beginvoorwaarden van y en $\frac{dy}{dx}$ voor $x=0$.

Wij zullen trachten oplossingen te konstrueren op $0<x<a$. Soms (naar het zal blijken) zullen deze geldig blijven (en dus bestaan) op $0\leq x<a$.

Het gedrag der oplossingen voor $x\to 0$ wordt bepaald door de wijze waarop $R(x)\to 0$ voor $x\to 0$.

Wij beperken ons tot een veelvuldig voorkomend type van singulier punt:

Definitie (4.4):

$x=0$ heet een gewoon singulier punt indien $R(0)=0$; $P(0)\neq 0$ $Q(0)\neq 0$ terwijl $x\,p(x)$ $x^2\,q(x)$ konvergente Taylorreeksontwikkelingen bezitten voor $|x|<\rho$.

Opmerking:

Wij beschouwen een singulier punt in $x=0$. Dit is geen beperking, immers als geldt $R(x)=0$ voor $x=x_0$ dan volgt uit de transformatie $x=\bar{x}+x_0$

$$R(\bar{x} + x_0) = \bar{R}(\bar{x}) = 0 \qquad \text{voor } \bar{x} = 0.$$

Voorbeeld:

De vergelijking van Euler van de tweede orde:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{\beta}{x^2}\,y = 0 \qquad (4.26)$$

waarin α en β konstanten zijn.

Zoek naar oplossingen van de vorm $y=x^r$. Substitutie in (4.26) levert:

$$r^2 + (\alpha-1)r + \beta = 0. \qquad (4.27)$$

Deze vergelijking heet de index-vergelijking.

Afhankelijk van de waarde van α en β verkrijgen wij twee reële, samenvallende of toegevoegd komplexe oplossingen.

Wij zullen een ander licht werpen op de index-vergelijking. Stel in (4.26) $x=\exp(t)$ of $\ln x=t$. Dit betekent:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right].$$

Substitutie in (4.26) levert:

$$e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha-1)\frac{dy}{dt} + \beta y\right] = 0. \qquad (4.28)$$

Wij hebben (4.26) dus herleid tot een lineaire differentiaalvergelijking met konstante coëfficienten. De karakteristieke vergelijking luidt:

$$\lambda^2 + (\alpha-1)\lambda + \beta = 0. \qquad (4.29)$$

De oplossingen hiervan zijn gelijk aan die van de index-vergelijking. Toepassing van de theorie van de differentiaalvergelijkingen met konstante coëfficienten levert:

1) $(\alpha-1)^2 - 4\beta > 0$; λ_1, λ_2 reëel

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}.$$

2) $(\alpha-1)^2 - 4\beta = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\, t\, e^{\lambda_1 t} = \left[c_1 + c_2 \ln x\right] x^{\lambda_1}.$$

3) $(\alpha-1)^2 - 4\beta < 0$; $\lambda_1 = \mu + i\omega$ $\quad \mu, \omega$ reëel

$\lambda_2 = \mu - i\omega$

$$y = e^{\mu t}\left[c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t\right] = x^{\mu}\left[c_1 \sin(\omega \ln x) + c_2 \cos(\omega \ln x)\right].$$

Definitie (4.5):

De differentiaalvergelijking

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad (4.30)$$

heet de vergelijking van Euler van de n-de orde.

Opgave:

Toon aan dat (4.30) m.b.v. de transformatie $x=e^t$ te herleiden is tot een n-de orde differentiaalvergelijking met konstante coëfficienten.

Bij het bepalen van oplossingen van (4.26) hebben wij ons beperkt tot het interval $x>0$.

Voor $x<0$ ontstaan moeilijkheden: wij moeten dan nagaan wat de betekenis is van $\ln x$ en x^r als r niet geheel is. Stel nu $x=-\xi$; uit $x<0$ volgt dan $\xi>0$. Substitutie in (4.26) levert met $y(x)=y(-\xi)=u(\xi)$:

$$\xi^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha\xi \frac{du}{d\xi} + \beta u = 0; \qquad \xi > 0.$$

Oplossingen van deze vergelijking hebben wij reeds gekonstrueerd. Dit betekent dat wij in bovenstaande formules x door −x moeten vervangen als $x<0$, of om reëelwaardige oplossingen te verkrijgen op een willekeurig interval dat de

oorsprong niet bevat, vervangen wij de formule op blz. 40 x door $|x|$.
Wij resumeren:

Stelling (4.5):
Stel voor het bepalen van oplossingen van de vergelijking van Euler:

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

op een willekeurig interval dat de oorsprong niet bevat: $y=x^r$.
Bereken de wortels r_1 en r_2 van de index-vergelijking

$$F(r) = r^2 + (\alpha-1)r + \beta = 0.$$

Als $r_1 \neq r_2$ en reëel: $y=c_1|x|^{r_1}+c_2|x|^{r_2}$.

Als $r_1=r_2$ en reëel: $y=\{c_1+c_2\ln|x|\}|x|^{r_1}$.

Als r_1 en r_2 complex: $y=|x|^{\mu}\{c_1\sin(\omega\ln|x|)+c_2\cos(\omega\ln|x|)\}$

waarin r_1, $r_2 = \mu \pm i\omega$.

Oplossingen in de vorm van machtreeksen in de omgeving van een gewoon singulier punt.

Stelling (4.6):
Gegeven de differentiaalvergelijking:

$$Ly = x^2y'' + x\{xp(x)\}y' + \{x^2q(x)\}y = 0 \qquad (4.31)$$

$x=0$ is een gewoon singulier punt, d.w.z. $xp(x)$ en $x^2q(x)$ zijn analytisch voor $x=0$.
De machtreeksen:

$$xp(x) = \sum_{n=o}^{\infty} p_nx^n \quad \text{en} \quad x^2q(x) = \sum_{n=o}^{\infty} q_nx^n \qquad (4.32)$$

konvergeren voor $0<|x|<\rho$.
Verder geldt:

$$p_o = \lim_{x\to o} xp(x), \quad q_o = \lim_{x\to o} x^2q(x).$$

Laten r_1 en r_2 $(r_1 \geq r_2)$ de reële wortels zijn van de index-vergelijking:

$$F(r) = r(r-1) + p_or + q_o = 0.$$

(4.31) heeft dan in een der intervallen $-\rho<x<0$ of $0<x<\rho$ twee lineair onafhankelijke oplossingen y_1 en y_2 van de volgende vorm:

a) $r_1 - r_2$ niet geheel:

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right\}$$

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n.\right\} \qquad (4.33)$$

b) $r_1 = r_2$:

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right\}$$

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n. \qquad (4.34)$$

c) $r_1 - r_2 = N$, $N > 0$ geheel:

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right]$$

$$y_2(x) = a\, y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]. \qquad (4.35)$$

De coëfficienten $a_n(r_1)$, $a_n(r_2)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ en de konstante a (die ook nul kan zijn) kunnen bepaald worden door de machtreeks-oplossingen in (4.31) te substitueren.

Wij zullen afleiden dat:

$$b_n(r_1) = \left.\frac{da_n}{dr}\right|_{r=r_1}$$

$$c_n(r_2) = \left.\frac{d}{dr}\left[(r-r_r)a_n\right]\right|_{r=r_2}$$

$$a = \lim_{r\to r_2} (r-r_2)a_N.$$

<u>Bewijs</u>:

Wordt niet gegeven. Een toelichting volgt wel.

Wij beschouwen het interval x>0 en stellen:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (4.36)$$

Substitutie van (4.36) en (4.32) in (4.31) levert:

$$a_o r(r-1)x^r + a_1(r+1)rx^{r+1} + \dots a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \dots$$
$$+ (p_o+p_1x + \dots p_nx^n + \dots)\left[a_orx^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \dots a_n(r+n)x^{r+n}+\dots\right]$$
$$+ (q_o+q_1x + \dots q_nx^n + \dots)\left[a_ox^r + a_1x^{r+1} + \dots a_nx^{r+n} + \dots\right] = 0.$$

Vermenigvuldiging van de machtreeksen en rangschikking van termen van gelijke machten van x levert:

$$a_oF(r)x^r + [a_1F(r+1) + a_o(p_1r+q_1)]x^{r+1}$$

$$+ [a_2F(r+2) + a_o(p_2r+q_2) + a_1(p_1(r+1)+q_1)]x^{r+2} +$$

$$\ldots + [a_nF(r+n) + a_o(p_nr+q_n) + a_1\{p_{n-1}(r+1)+q_{n-1}\}$$

$$+ \ldots a_{n-1}\{p_1(r+n-1)+q_1\}]x^{r+n} + \ldots = 0 \qquad (4.37)$$

waarin $F(r)=r(r-1)+p_or+q_o$.

In een kompakte vorm luidt (4.37):

$$Ly=Lx^r \sum_{n=o}^{\infty} a_nx^n = a_oF(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)a_n + \sum_{k=o}^{n-1} a_k\left[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right]\right\}x^{r+n} = 0 . \qquad (4.38)$$

De coëfficient van iedere macht van x in (4.38) moet gelijk aan nul zijn. Daar $a_o \neq 0$ moet gelden:

$$F(r) = r(r-1) + p_or + q_o = 0$$

met als oplossingen r_1 en r_2, en verder:

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=o}^{n-1} a_k \left[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right] = 0. \qquad (4.39)$$

Uit (4.39) volgt dat a_n een funktie is van $a_o \ldots a_{n-1}$ mits $F(r+1),F(r+2),\ldots,F(r+n)$ ongelijk aan nul is.

a) Daar $F(r_1)=F(r_2)=0$ volgt dat als $r_2+n \neq r_1$ voor $n \geqq 1$ $F(r_1+n) \neq 0$. De twee lineair onafhankelijke oplossingen worden dus voorgesteld door (4.33) waarin de konstante a_o op 1 genormeerd is.

b) $r_1 = r_2$.
Beschouw de funktie $\phi(r,x)=x^r[a_o+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r)x^n]$ $x>0$, waarin voor alle r zodanig dat $F(r+n) \neq 0$, $a_n(r)$ gegeven wordt door (4.39) voor $n \geqq 1$. Er geldt nu:

$$L\phi(r,x)=a_oF(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)a_n + \sum_{k=o}^{n-1} a_k\left[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right]\right\} x^{r+n} . \qquad (4.40)$$

Substitutie van (4.39) in (4.40) levert:

$$L\,\phi(r,x) = a_oF(r)x^r. \qquad (4.41)$$

Nu geldt: $F(r)=(r-r_1)^2$.
Dit betekent dat $\phi(r_1;x)=y_1(x)$ oplossing van de differentiaalvergelijking is.
Differentiatie naar r in linker en rechterlid van (4.41) levert:

$$\frac{\partial}{\partial r} L\,\phi(r,x) = L\,\frac{\partial}{\partial r}\,\phi(r,x) = \frac{\partial}{\partial r}\left[a_oF(r)x^r\right]$$

of:

$$L \frac{\partial}{\partial r}\left[x^r \left\{a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right\}\right] = 2a_o(r-r_1)x^r + a_o(r-r_1)^2 x^r \ln x$$

$$L\left[x^r \ln x \left\{a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^{r+n}\right\} + x^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dr} x^n\right] =$$

$$= 2a_o(r-r_1)x^r + a_o(r-r_1)^2 x^r \ln x.$$

Hieruit volgt dat voor $r=r_1$:

$$y_1(x)\ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left.\frac{da_n}{dr}\right|_{r=r_1} x^n$$

oplossing is van (4.31).

c) $r_1 - r_2 = N$ $\quad N > 0$, geheel.

De uitwerking hiervan is vrij gekompliceerd. Wij zullen dit geval toelichten aan de hand van een voorbeeld:

<u>De differentiaalvergelijking van Bessel</u>.

De differentiaalvergelijking van Bessel luidt:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad (4.42)$$

of

$$x \frac{d}{dx}\left[x \frac{dy}{dx}\right] + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

waarin ν een konstante is.

Wij zullen voor $\nu=0$, $\nu=\frac{1}{2}$ en $\nu=1$ oplossingen konstrueren in het interval $x>0$.

Stel

$$y = x^r \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n. \qquad (4.43)$$

Substitutie in (4.42) levert:

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n \left[(r+n)^2 - \nu^2\right] x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n = 0$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} &a_o(r^2 - \nu^2) = 0 \\ &a_1 \left[(r+1)^2 - \nu^2\right] = 0 \qquad\qquad (4.44) \\ &a_n \left[(r+n)^2 - \nu^2\right] + a_{n-2} = 0 \qquad n \geqq 2 \end{aligned}$$

of

$$r_{1,2} = \pm \nu; \; a_1 = 0; \; a_n = \frac{-a_{n-2}}{(r+n)^2-\nu^2} \qquad n \geqq 2.$$

Dit betekent: $a_1 = a_3 = a_5 = \dots a_{2n+1} = 0$.

Stel $n=2m$:

$$a_{2m} = \frac{-a_{2m-2}}{(r+2m)^2-\nu^2} = \frac{+a_{2m-4}}{[(r+2m)^2-\nu^2][(r+2m-2)^2-\nu^2]} = \dots =$$

$$= \frac{(1-)^m a_o}{[(r+2m)^2-\nu^2][(r+2m-2)^2-\nu^2]\dots[(r+2)^2-\nu^2]} . \qquad (4.45)$$

Wij vinden dus als lineair onafhankelijke oplossingen als $\nu \neq 0$ en ν niet geheel:

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\nu)x^{2n} \qquad (4.46)$$

$$y_2(x) = x^{-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(-\nu)x^{2n} \qquad (4.47)$$

waarin $b_n(r)=a_{2m}(r)$.

Verder geldt:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{-1}{4m^2 \pm 4m\nu} = \frac{-1}{4m(m\pm\nu)} .$$

De reeksen konvergeren voor alle $x>0$ (d'Alembert).

Wij merken op dat er moeilijkheden ontstaan als ν een natuurlijk getal is.

<u>Wij onderzoeken:</u>

I. $\nu=0$; samenvallende wortels $r_1=r_2=0$.

(4.45) luidt:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_o}{(2m)^2(2m-2)^2\dots2^2} = \frac{(-1)^m a_o}{2^{2m}(m!)^2} . \qquad (4.48)$$

Een oplossing is dus:

$$y_1(x) = a_o\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right] = a_o\, J_o(x). \qquad (4.49)$$

Deze reeks konvergeert voor $x>0$ en is analytisch voor $x=0$,

Voor het bepalen van de tweede oplossing die lineair onafhankelijk is met (4.49) zijn twee methoden.

Wij kunnen de uitdrukking voor $y_2(x)$ (4.34) in de differentiaalvergelijking substitueren en vervolgens de coëfficienten b_n bepalen.

Wij kunnen b_n ook bepalen uit:

$$b_n(r) = \frac{d}{dr}\, a_1(r). \qquad (4.50)$$

Wij zullen deze laatste methode volgen.

Uit (4.44) volgt: $\frac{da_1}{dr} = 0$. Uit de recurrente betrekking volgt dan ook:

$$a'_3 = a'_5 = \dots a'_{2n+1} = 0.$$

Wij berekenen dus alleen: $\frac{d}{dr}\, a_{2m}(r)\Big|_{r=o}$.

(4.45) luidt voor $\nu=0$:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_o}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2\ldots(2+r)^2} \qquad m=1,2,3,\ldots \tag{4.51}$$

Merk op dat als:

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(x-\alpha_n)^{\beta_n}$$

dat

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \ldots \frac{\beta_n}{x-\alpha_n} .$$

Voor (4.51) vinden wij:

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left[\frac{1}{2m+r} + \frac{1}{2m-2+r} + \ldots \frac{1}{2+r}\right]$$

of voor r=0:

$$a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m-2} + \ldots \frac{1}{2}\right] a_{2m}(0). \tag{4.52}$$

Substitutie van (4.48) in (4.52) levert:

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_o}{2^{2m}(m!)^2} \qquad m=1,2,3,\ldots \tag{4.53}$$

waarin

$$H_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \ldots \frac{1}{2} + 1. \tag{4.54}$$

De tweede oplossing luidt dus:

$$y_2(x) = J_o(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}. \tag{4.55}$$

In plaats van $y_2(x)$, wordt als tweede lineair onafhankelijke oplossing een lineaire kombinatie van $y_2(x)$ en $J_o(x)$ genomen:

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_o(x)\right] \tag{4.56}$$

γ is de konstante van Euler-Mascheroni en is gedefinieerd door:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \approx 0.5772.$$

Substitutie van (4.55) in (4.56) levert dan:

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left[(\gamma + \ln \frac{x}{2})J_o(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right]. \tag{4.57}$$

De algemene oplossing van de vergelijking van Bessel van de orde nul voor $x>0$ luidt dan:

$$y = c_1 J_o(x) + c_2 Y_o(x).$$

Wij merken op dat $J_o(x)\to 1$ als $x\to 0$ terwijl $Y_o(x)$ een logarithmische singulariteit heeft voor $x=0$.

II. $\nu=\frac{1}{2}$.

Uit (4.44) volgt: $r_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$, $a_1=a_3=\ldots a_{2n+1}=0$

$$a_n\left[(r+n)^2-\frac{1}{4}\right]=-a_{n-2} \qquad n \geqq 2\,. \tag{4.58}$$

Substitutie van $r=\frac{1}{2}$ in (4.58) geeft:

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{r(n+1)} \qquad n=2,4,6,\ldots$$

of met n=2m:

$$a_{2m}=\frac{-a_{2m-2}}{2m(2m+1)}=\frac{1_{2m-4}}{(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)}=\ldots=\frac{(-1)^m\,a_o}{(2m+1)!}$$

en dus:

$$y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\,x^{2m}}{(2m+1)!}\right]$$

of

$$y_1(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=o}^{\infty}\frac{(-1)^m\,x^{2m+1}}{(2m+1)!}=x^{-\frac{1}{2}}\,\text{sinx}. \tag{4.59}$$

De Bessel-funktie van de eerste soort en van de orde $\frac{1}{2}$ is gedefinieerd als:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\text{sinx}.$$

Voor $r=-\frac{1}{2}$ zijn de coëfficienten van a_o en a_1 in (4.44) gelijk aan nul. a_o en a_1 kunnen dus willekeurig gekozen worden. Bij a_o verkrijgen wij, met behulp van de recurrente betrekking, $a_2,a_4,\ldots,a_{2n}$ en bij a_1: $a_3,a_5,\ldots,a_{2n+1}$.

In de tweede oplossing komt de logarithmische term niet voor.

Ga na dat:

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n\,a_o}{(2n)!} \qquad n=1,2,\ldots$$

$$a_{2n+1}=\frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} \qquad n=1,2,\ldots$$

waaruit volgt:

$$y_2(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left[a_o\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+a_1\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]=a_o\frac{\text{cosx}}{\sqrt{x}}+a_1\frac{\text{sinx}}{\sqrt{x}}\,. \tag{4.60}$$

De Besselfunktie van de eerste soort en van de orde $-\frac{1}{2}$ is gedefinieerd door:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\text{cosx}.$$

De algemene oplossing luidt:

$$y=c_1\,J_{\frac{1}{2}}(x)+c_2\,J_{-\frac{1}{2}}(x). \tag{4.61}$$

III. $\nu=1$.

Uit (4.44) volgt: $r_{1,2}=\pm 1$.

$$a_1 = a_3 = a_{2n+1} = 0.$$

De recurrente betrekking luidt voor r=1:

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n+2)} \qquad n=2,4,6,\ldots$$

n=2m levert:

$$a_{2m} = \frac{-a_{2m-2}}{2^2 m(m+1)} = \frac{+a_{2m-4}}{2^4(m+1)m.m(m-1)} = \ldots = \frac{(-1)^m a_o}{2^{2m}(m+1)!m!} \qquad m=1,2,3,\ldots$$

Stel $a_o=1$; de oplossing is dan:

$$y_1(x) = x \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m+1)!m!} x^{2m}. \tag{4.62}$$

De Besselfunktie van de eerste soort en orde een is gedefinieerd door:

$$J_1(x) = \tfrac{1}{2}y_1(x). \tag{4.63}$$

(4.62) konvergeert voor alle x; $J_1(x)$ is dus gedefinieerd voor alle x.
Voor het bepalen van de tweede oplossing substitueren wij:

$$y_2(x) = a\, J_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right] \qquad x > 0$$

in (4.42):

$$2a\, x\, J_1'(x) + \sum_{n=o}^{\infty} (n-2)n\, c_n\, x^{n-1} + \sum_{n=o}^{\infty} c_n\, x^{n+1} = 0 \quad \text{met } c_o=1. \tag{4.64}$$

Substitutie van (4.62) en (4.63) in (4.64) levert:

$$-c_1 + \left[0.c_2+c_o\right]x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2-1)c_{n+1} + c_{n-1}\right]x^n =$$

$$= -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!}\right]. \tag{4.65}$$

In het rechterlid staan slechts oneven machten van x; dan volgt dus uit $c_1=0$; $c_3=c_5=\ldots c_{2n+1}=0$. Verder geldt: $a=-c_o=-1$.
Stel in het rechterlid n=2m+1.
Wij verkrijgen dan de volgende betrekking:

$$\left[(2m+1)^2-1\right]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!m!} \qquad m=1,2,3,\ldots$$

m=1 levert:

$$(3^2 - 1)c_4 + c_2 = \frac{(-1)3}{2^2 \cdot 2!} .$$

c_2 kan willekeurig gekozen worden.

Kies $c_2 = \frac{1}{2^2}$. Dan volgt:

$$c_4 = \frac{-1}{2^4 . 2!} \left[(1 + \tfrac{1}{2}) + 1 \right] = \frac{-1}{2^4 . 2!} (H_2 + H_1).$$

Het is eenvoudig om aan te tonen dat: (dit betekent dat het vrijwel niet doenlijk is)

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m! (m-1)!} \qquad m=1,2,3,\ldots$$

De tweede oplossing luidt dus:

$$y_2(x) = -J_1(x) \ln x + \frac{1}{x} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (H_m - H_{m-1})}{m! (m-1)!} \right] (\tfrac{x}{2})^{2m}. \qquad (4.66)$$

Als tweede oplossing, de Besselfunktie van de tweede soort van de orde een, wordt gewoonlijk een lineaire kombinatie van $J_1(x)$ en $y_2(x)$ genomen:

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_1(x) \right] .$$

De algemene oplossing van de vergelijking van Bessel voor $\nu=1$ luidt dan:

$$y(x) = c_1 \, J_1(x) + c_2 \, Y_1(x). \qquad (4.67)$$

Hoofdstuk 5: Randwaardeproblemen voor tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen.

Definitie (5.1):

De differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = f(x), \qquad 0 \leqq x \leqq 1 \qquad (5.1)$$

waarin $Q(x)$, $R(x)$, $f(x)$ kontinu zijn op $[0,1]$ met randvoorwaarden

$$y(0) = \alpha \qquad y(1) = \beta \qquad (\alpha,\beta \text{ konstanten}) \qquad (5.2)$$

heet een randwaardeprobleem.

Definitie (5.2):

Het randwaardeprobleem heet homogeen als $f(x)\equiv 0$ op $[0,1]$ terwijl bovendien geldt: $y(0)=y(1)=0$.

Existentie en eenduidigheid van de oplossingen.

De stellingen die wij hierover voor beginwaarde problemen bewezen hebben, gelden niet voor randwaardeproblemen.

Voorbeeld:

$$y'' + \pi^2 y = 0 \qquad \text{met} \qquad y(0) = 0 \qquad y(1) = 1.$$

Algemene oplossing: $y=c_1\cos\pi x+c_2\sin\pi x$

$$y(0) = c_1 = 0$$
$$y(1) = 0 \qquad \text{voor alle } c_2.$$

Aan de tweede randvoorwaarde kan niet worden voldaan. De oplossing bestaat niet.

Wij zullen aantonen dat randwaardeprobleem (5.1), (5.2) dat dus ook het speciale geval $f(x)\equiv 0$ op $[0,1]$ impliceert, herleid kan worden tot een randwaardeprobleem met homogene randvoorwaarden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = f^*(x)$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Beschouw een willekeurige funktie $g(x)\in C'[0,1]$ met $g(0)=\alpha$ en $g(1)=\beta$ [bijv. $g(x)=\alpha+(\beta-\alpha)x$].

Stel:

$$y(x) = \eta(x) + g(x).$$

Substitutie in (5.1) levert:

$$\eta'' + Q(x)\eta' + R(x)\eta = f(x) - [g'' + Q(x)g' + R(x)g] = f^*(x)$$

met randvoorwaarden: $\eta(0)=\eta(1)=0$.

Laten $y_1(x)$ en $y_2(x)$ twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn van:

$$y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (5.3)$$
$$y(0) = \alpha \qquad y(1) = \beta.$$

De algemene oplossing luidt:

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Opleggen van de randvoorwaarden levert:

$$\begin{aligned} c_1y_1(0) + c_2y_2(0) &= \alpha \\ c_1y_1(1) + c_2y_2(1) &= \beta. \end{aligned} \qquad (5.4)$$

Dit inhomogene lineaire stelsel algebraïsche vergelijkingen is eenduidig oplosbaar in c_1 en c_2 als:

$$D = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5.5)$$

Voor het homogene randwaarde probleem ($\alpha=\beta=0$) heeft (5.4) met voorwaarde (5.5) geen andere oplossing dan de nuloplossing!

Wij kunnen nu de volgende eenduidigheidsstelling formuleren:

Stelling (5.1):

Gegeven:

$$y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \qquad (5.6)$$

Als er een oplossing van (5.6) bestaat met $y(0)=\alpha$, $y(1)=\beta$ en $D\neq0$ dan is er slechts één.

Bewijs:

Stel $\varphi(x)$ en $\Psi(x)$ voldoen aan de differentiaalvergelijking en randvoorwaarden.

Zij verder: $y_o=\varphi-\Psi$.

Er volgt dan:

$$y_o'' + Q(x)y_o' + R(x)y_o = 0 \qquad y_o(0) = y_o(1) = 0.$$

Daar $D\neq0$ voldoet slechts $y_o\equiv0$, waaruit volgt: $\varphi=\Psi$.

Samenvatting: (alternatief van Fredholm)

Of het inhomogene probleem heeft slechts één oplossing (het homogene probleem heeft geen andere dan de nuloplossing), óf het homogene probleem heeft de niet-triviale oplossing.

Opmerking:

Als het homogene probleem een niet-triviale oplossing bezit dan kan uit het voorgaande niet de existentie van de oplossing van het inhomogene probleem worden afgeleid [deze oplossing blijkt te kunnen bestaan onder speciale voorwaarden].

Zeker is dat als de oplossing van het inhomogene probleem bestaat, deze niet eenduidig is.

Opmerking:

Zij $\varphi(x)$ oplossing van $\varphi''+Q(x)\varphi+R(x)\varphi=0$

$$\varphi(0)=\alpha \qquad \varphi(1)=\beta$$

en $\Psi(x)$ oplossing van $\Psi''+Q(x)\Psi'+R(x)\Psi=f(x)$

$$\Psi(0)=0 \qquad \Psi(1)=0.$$

Dan voldoet $y=\varphi+\Psi$ aan:

$$y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$$

$$y(0) = \alpha \qquad (1) = \beta.$$

Inhomogeen probleem met homogene randvoorwaarden:

$$y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{5.7}$$

Met behulp van de Liouville transformatie kunnen wij dit probleem herleiden tot:

$$\eta'' + R^*(x)\eta = f^*(x)$$

$$\eta(0) = \eta(1) = 0 \tag{5.8}$$

waarin:

$$y = \eta \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int Q(x)dx\right\}$$

$$R^*(x) = R(x) - \tfrac{1}{4}Q^2(x)$$

$$f^*(x) = f(x)\exp\left\{\tfrac{1}{2}\int Q(x)dx\right\}.$$

De algemene oplossing van (5.8) luidt: (4.17)

$$\eta(x) = \frac{1}{w}\int^{x}\Big[\eta_2(x)\eta_1(\xi)-\eta_1(x)\eta_2(\xi)\Big]f^*(\xi)d\xi + A_1\eta_1(x) + A_2\eta_2(x) \tag{5.9}$$

waarin η_1 en η_2 twee lineair onafhankelijke oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking (5.8). $w=w(\eta_1,\eta_2)$ is de determinant van Wronski.

Wij konstrueren η_1 en η_2 nu zodanig dat geldt:

$$\eta_1(0) = 0 \qquad \eta_1(1) \neq 0$$

$$\eta_2(0) \neq 0 \qquad \eta_2(1) = 0.$$

Opleggen van de randvoorwaarden van (5.8) levert voor (5.7):

$$\eta_2(0)\left[\frac{1}{w}\int^{0}\eta_1(\xi)f^*(\xi)d\xi + A_2\right] = 0$$
$$\eta_1(1)\left[-\frac{1}{w}\int^{1}\eta_2(\xi)f^*(\xi)d\xi + A_1\right] = 0. \tag{5.10}$$

Substitutie van A_1 en A_2 in (5.9) levert:

$$\eta(x) = \frac{1}{w}\int_0^x \eta_2(x)\eta_1(\xi)f^*(\xi)d\xi + \frac{1}{w}\int_x^1 \eta_1(x)\eta_2(\xi)f^*(\xi)d\xi. \tag{5.11}$$

Deze uitdrukking kunnen wij ook schrijven als:

$$\eta(x) = \int_0^1 G(x,\xi)f^*(\xi)d\xi \tag{5.12}$$

waarin:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{w}\eta_1(\xi)\eta_2(x) & \xi < x \\ \frac{1}{w}\eta_1(x)\eta_2(\xi) & \xi > x \end{cases} \tag{5.13}$$

$G(x,\xi)$ heet de funktie van Green.

De voorwaarden $\eta_1(1) \neq 0$, $\eta_2(0) \neq 0$.

Beschouw twee lineair onafhankelijke oplossingen van $\tilde{\eta}_1$ en $\tilde{\eta}_2$ van $\eta''+R\ \ (x)\eta=0$ welke aan geen van de randvoorwaarden voldoen.

η_1 en η_2 worden nu gegeven door:

$$\eta_1(x) = \tilde{\eta}_1(x) - \frac{\tilde{\eta}_1(0)}{\tilde{\eta}_2(0)}\tilde{\eta}_2(x)$$
$$\eta_2(x) = \tilde{\eta}_2(x) - \frac{\tilde{\eta}_2(1)}{\tilde{\eta}_1(1)}\tilde{\eta}_1(x). \tag{5.14}$$

De voorwaarde $\eta_1(1)\neq 0$ en $\eta_2(0)\neq 0$ betekenen voor (5.14):

$$\tilde{\eta}_1(1)\tilde{\eta}_2(0) - \tilde{\eta}_1(0)\tilde{\eta}_2(1) \neq 0.$$

Deze voorwaarde komt overeen met (5.5).

Wij zullen aan de hand van een voorbeeld een aantal eigenschappen van de Greense funktie afleiden.

Beschouw:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = f(x) \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{5.15}$$
$$y(0) = y(1) = 0 \qquad f(x) \in C'[0,1].$$

k is een konstante waarvoor geldt:

$$\sin k \neq 0.$$

De oplossing luidt:

$$y(x) = \int_0^1 f(\xi)G(x,\xi)d\xi \tag{5.16}$$

met:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\sin k\xi \,\sin k(1-x)}{k \sin k} & \xi < x \\ -\dfrac{\sin kx \,\sin k(1-\xi)}{k \sin k} & \xi > x. \end{cases}$$

De funktie van Green wordt bepaald door de homogene differentiaalvergelijking. Ga na dat $G(x,\xi)$ de volgende eigenschappen heeft:

1) $G'' + k^2G = 0 \qquad x \neq \xi$
2) $G(x,\xi)$ is kontinu in $x = \xi$
3) $\lim\limits_{\xi \uparrow x} \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi} - \lim\limits_{\xi \downarrow x} \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi} = \dfrac{\partial G(x,x^-)}{\partial \xi} - \dfrac{\partial G(x,x^+)}{\partial \xi} = -1.$
   De afgeleide van G naar ξ is diskontinu in $\xi = x$.
4) $G(x,0) = G(x,1) = 0$
5) $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.

Het is mogelijk de representatie van de oplossing (5.10) met behulp van bovenstaande eigenschappen direkt uit de differentiaalvergelijking af te leiden. Vermenigvuldig daartoe (5.15) links en rechts met $G(x,\xi)$ en integreer van 0 tot 1:

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y\right] G(x,\xi)dx = \int_0^1 f(x)G(x,\xi)dx. \tag{5.17}$$

Wij beschouwen de intervallen: $0 \leqq x \leqq \alpha < \xi$

$\xi < \beta \leqq x \leqq 1.$

Notatie: $\lim\limits_{\alpha \uparrow \xi} f(\alpha) = f(\xi^-)$

$\lim\limits_{\beta \downarrow \xi} f(\beta) = f(\xi^+)$, analoog voor de afgeleiden.

$$\int_0^1 \left[\ddot{y}+k^2y\right] G(x,\xi)dx = \lim_{\alpha \uparrow \xi} \int_0^{\alpha} \left[\ddot{y}+k^2y\right] G(x,\xi)dx + \lim_{\beta \downarrow \xi} \int_{\beta}^{1} \left[\ddot{y}+k^2y\right] G(x,\xi)dx.$$

Na tweemaal partiëel integreren van de eerste termen van de beide integralen in het rechterlid verkrijgen wij:

$$\int_0^1 f(x)G(x,\xi)dx = y(\xi)\left[G'(\xi^+,\xi)-G'(\xi^-,\xi)\right] + y'(\xi)\left[G(\xi^-,\xi)-G(\xi^+,\xi)\right] +$$
$$+ y(0)G'(0,\xi) - y(1)G'(1,\xi) + G(1,\xi)y'(1) - G(0,\xi)y'(0) +$$
$$+ \int_0^{\xi^-} (G'' + k^2G)y\,dx + \int_{\xi^+}^1 (G'' + k^2G)y\,dx.$$

Met behulp van $y(0)=y(1)=0$ en de vijf eigenschappen van de Greense funktie verkrijgen wij:

$$y(\xi) = \int_0^1 f(x)\, G(x,\xi)dx = \int_0^1 \left[y'' + k^2y\right] G(x,\xi)dx. \qquad (5.18)$$

Wanneer wij de laatste integraal niet opsplitsen doch direkt tweemaal partiëel integreren, vinden wij:

$$y(\xi) = \int_0^1 (G'' + k^2G)y(x)dx.$$

$(G''+k^2G)$ is overal nul behalve in $x=\xi$, deze uitdrukking is geen funktie in de gebruikelijke zin.

Er kan worden aangetoond dat $G''+k^2G$ gelijk is aan de delta-funktie van Dirac. Deze delta-funktie $\delta(x-\xi)$ is gedefinieerd door:

$$\int_0^1 \varphi(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = \varphi(x) \qquad x \in [0,1]$$

waarin $\varphi(x)$ een willekeurige kontinue funktie op $[0,1]$ is.

Eenvoudige eigenwaarde problemen.

Wij beschouwen het randwaardeprobleem:

$$\left.\begin{aligned} & y'' + P(x,\lambda)y' + Q(x,\lambda)y = 0 \\ & y(0) = y(1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.19)$$

waarin λ een parameter is.

Definitie (5.3):

De waarden van λ waarvoor (5.19) oplossingen heeft die ongelijk zijn aan de nuloplossing heten de eigenwaarden van het probleem; de ermee corresponderende oplossingen heten de eigenfunkties.

Voorbeeld 1:

$$y'' + \lambda^2y = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0.$$

Algemene oplossing:

$$y = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x. \qquad (5.20)$$

Randvoorwaarden: $y(0) = B = 0$

$y(1) = A\sin\lambda = 0$

$\sin\lambda = 0 \rightarrow \lambda = n\pi \qquad n=1,2,3,\ldots$

De eigenwaarden zijn $\lambda^2_n = n^2\pi^2$.

De eigenfunkties zijn $y_n = A_n \sin n\pi x$.

De konstanten A_n zijn willekeurig.

Stel nu $A_n = 1$, $n=1,2,\dots$

Ga na dat geldt:

$$\int_0^1 y_n y_m dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ als } n=m \\ 0 \text{ als } n \neq m. \end{cases}$$

Beschouw: $f(x) \in C^2[0,1]$ terwijl $f(0)=f(1)=0$.

De eigenfunkties kunnen gebruikt worden om $f(x)$ in een reeks te ontwikkelen:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x).$$

Er kan bewezen worden dat deze reeks gelijkmatig konvergeert op $[0,1]$. Tevens geldt:

$$a_n = 2 \int_0^1 f(\xi) \sin n\pi\xi d\xi.$$

Voorbeeld 2:

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \qquad y(-1) = y(1) = 0$$

Randvoorwaarden opleggen aan (5.20) levert:

$$\left.\begin{aligned} A\sin\lambda + B\cos\lambda &= 0 \\ -A\sin\lambda + B\cos\lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

(5.21) is een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden A en B, deze verschillen van de nuloplossing als:

$$\begin{vmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.22)$$

of

$$\sin 2\lambda = 0$$

waaruit de eigenwaarden volgen:

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{4}.$$

Samenvatting:

Uit deze voorbeelden blijkt dat:

1) er bestaan aftelbaar oneindig veel eigenwaarden;
2) de corresponderende funkties zijn op $[0,1]$ orthogonaal;
3) iedere funktie $f(x) \in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$ kan in een reeks van eigenfunkties worden ontwikkeld.

Deze eigenschappen blijken voor de volgende klasse van eigenwaarde problemen te gelden:

$$w'' + (\lambda\rho(x) + Q(x))w = 0$$
$$w(0) = w(1) = 0 \qquad (5.23)$$
$$Q(x) \text{ en } \rho(x) \in C'[0,1]; \ \rho(x) > 0 \ \text{ op } [0,1].$$

Dit eigenwaardeprobleem heet het probleem van Sturm-Liouville. Schrijf (5.23) als volgt:

$$Lw + \lambda\rho w = 0; \qquad L = \frac{d^2}{dx^2} + Q(x). \qquad (5.24)$$

Definitie (5.4):

Een differentiaaloperator $\tilde{L}$ heet zelf-geadjungeerd indien geldt:

$$u\,\tilde{L}\,v - v\,\tilde{L}\,u = \frac{d}{dx} f(u,v,u',v')$$

waarin f een geschikt gekozen funktie is.

Operator L (5.24) is zelf-geadjungeerd immers:

$$u\,L\,v - v\,L\,u = \frac{d}{dx}\left[uv' - vu'\right]. \qquad (5.25)$$

Als geldt: $u(0)=u(1)=v(0)=v(1)=0$, dan wordt (5.25) na integratie:

$$\int_0^1 (u\,L\,v - v\,L\,u)dx = 0. \qquad (5.26)$$

Voor het probleem van Sturm-Liouville (5.23) gelden nu de volgende **stellingen:**

Stelling (5.2): (zonder bewijs)

Bij iedere eigenwaarde λ_n behoort één en slechts één eigenfunktie φ_n.

Stelling (5.3):

De eigenwaarden λ_n en bijbehorende eigenfunkties φ_n zijn alle reëel.

Bewijs:

De operator L is reëel, $\rho(x)$ is een reële funktie. Als de complexe λ_n en φ_n aan het probleem voldoen, dan voldoen ook de toegevoegd complexe $\bar{\lambda}_n$ en $\bar{\varphi}_n$ (ga na). Dan geldt:

$$L(\varphi_n) = -\lambda_n\rho\varphi_n$$
$$L(\bar{\varphi}_n) = -\bar{\lambda}_n\rho\bar{\varphi}_n.$$

We berekenen $\int_0^1(\bar{\varphi}L(\varphi)-\varphi L(\bar{\varphi}))dx=(\bar{\lambda}_n-\lambda)\int_0^1\rho|\varphi|^2dx$.

Met behulp van (5.26) concluderen we dat het linkerlid nul is. Dus

$$(\lambda_n - \bar{\lambda}_n)\int_0^1 \rho\,\varphi_n\,\bar{\varphi}_n\,dx = 0.$$

Daar $\rho\varphi_n\bar{\varphi}_n=\rho|\varphi_n|^2$ definiet positief is op het interval, geldt:

$$\lambda_n = \bar{\lambda}_n.$$

Dus is λ_n reëel.

Stel bij een reële eigenwaarde λ_n hoort een complexe eigenfunktie φ_n.
Dan voldoen λ_n en de toegevoegd complexe $\bar{\varphi}_n$ eveneens aan het probleem.
Volgens stelling (5.2) geldt dan $\varphi_n=\bar{\varphi}_n$. Dus φ_n is reëel.

Stelling (5.4):

De eigenfunkties φ_n van het probleem voldoen aan de orthogonaliteitsrelatie

$$\int_0^1 \rho(x)\ \varphi_m\varphi_n dx = 0 \qquad \text{indien } n \neq m$$

$$\int_0^1 \rho(x)\ \varphi_m\varphi_n dx \neq 0 \qquad \text{indien } n = m.$$

Bewijs:

Als φ_n en φ_m eigenfunkties zijn van het probleem, geldt:

$$L(\varphi_n) = -\lambda_n\ \rho\ \varphi_n$$

$$L(\varphi_m) = -\lambda_m\ \rho\ \varphi_m.$$

We berekenen:

$$\int_0^1 [\varphi_m L(\varphi_n) - \varphi_n L(\varphi_m)]\ dx = (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 \rho\ \varphi_m\ \varphi_n\ dx.$$

Met behulp van (5.26) concluderen we dat het linkerlid nul is. Dus

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 \rho\ \varphi_m\ \varphi_n\ dx = 0.$$

Als $m \neq n$ geldt de orthogonaliteitsrelatie

$$\int_0^1 \rho\ \varphi_m\ \varphi_n\ dx = 0. \qquad (5.27)$$

We zullen in het volgende veronderstellen dat de eigenfunkties zodanig genormeerd zijn, dat geldt:

$$\int_0^1 \rho\ \varphi_n^2\ dx = 1. \qquad (5.28)$$

De eigenfunkties vormen een orthonormaal stelsel van funkties.

Opmerking:

Zowel in stelling (5.3) als (5.4) is gebruik gemaakt van de zelf-geadjungeerdheid van de operator L.

Stelling (5.5):

Voor de eigenwaarden λ_n $(n=1,2,\ldots)$ van het Sturm-Liouville probleem bestaat een reëel getal a zodanig dat $\lambda_n > a$ $(n=1,2,\ldots)$.

Bewijs:

Vermenigvuldig (5.23) met w en integreer over het interval. Dit levert:

$$\int_0^1 w \frac{d^2w}{dx^2} dx + \int_0^1 Qw^2 dx + \lambda \int_0^1 \rho w^2 dx = 0.$$

Partiële integratie van de eerste term levert met behulp van de randvoorwaarden:

$$\lambda \int_0^1 \rho w^2 dx + \int_0^1 Qw^w dx = \int_0^1 \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx. \tag{5.29}$$

Nu geldt $\int_0^1 \rho w^2 dx > 0$ en $\int_0^1 \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx > 0$. Hieruit volgt:

a) Als Q definiet positief, dan geldt $\lambda > 0$.

b) Q(x) kan negatieve waarden aannemen op het interval, maar $|\rho(x)|$ en $|Q(x)|$ zijn begrensd op $[0,1]$.

Daar $\rho > 0$ kunnen we altijd een getal α vinden zodat

$$-\alpha\rho + Q < 0 \qquad \text{voor alle } 0 \leqq x \leqq 1.$$

We stellen $\lambda = \bar{\lambda} - \alpha$, dan wordt (5.29):

$$\bar{\lambda} \int_0^1 \rho w^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx + \int_0^1 (\alpha\rho - Q) w^2 dx. \tag{5.30}$$

Dan geldt $\bar{\lambda} > 0$ en dus $\lambda > -\alpha$.

c) Het geval dat $|\rho|$ en of $|Q|$ niet begrensd zijn op $[0,1]$ behandelen we niet.

Enkele algemene resultaten uit de theorie van Sturm-Liouville.

We schrijven vergelijking (5.24) in de vorm

$$L(w) = F \tag{5.31}$$

met

$$F = -\lambda\rho w \tag{5.32}$$

met randvoorwaarden:

$$w(0) = w(1) = 0. \tag{5.33}$$

Op vergelijking (5.31) met randvoorwaarden (5.33) kunnen we formuel formule (5.12) toepassen. Voorwaarde hiervoor was, dat de homogene vergelijking $L(w)=0$ geen oplossing had die aan de randvoorwaarden voldeed. Dit komt overeen met de eis dat $\lambda=0$ geen eigenwaarde is van het Sturm-Liouville probleem.

Hulpstelling (5.6):

Deze eis is geen beperking van algemeenheid.

Bewijs:

Stel $\lambda=0$ is een eigenwaarde van het probleem. De konstante μ komt niet voor onder de eigenwaarden van het probleem. Tel bij het linker- en rechterlid van vgl. (5.23) op $\mu\rho w$ en stel:

$$\bar{L} = L + \mu\rho \qquad (5.34)$$

$$\bar{\lambda} = -\mu + \lambda$$

dan worden vgl. (5.31) en (5.32) gekombineerd

$$\bar{L}(w) = -\bar{\lambda}\rho w \qquad (5.35)$$

met de randvoorwaarden (5.33) terwijl $\bar{\lambda}=0$ geen eigenwaarde van het probleem is.

Wij nemen vervolgens aan dat na transformatie het probleem geen eigenwaarde $\lambda=0$ toelaat. Wij schrijven de oplossing van (5.31) in de vorm:

$$w(x) = \int_0^1 F(\xi)G(x,\xi)d\xi \qquad (5.36)$$

of met (5.32)

$$w(x) = -\lambda \int_0^1 w(\xi)\rho(\xi)G(x,\xi)d\xi. \qquad (5.37)$$

We merken op dat $w(x)$ een oplossing is van de integraalvergelijking (5.37). Voor dit type vergelijkingen bestaat een uitvoerige theorie die ons in staat stelt een aantal fundamentele eigenschappen van het probleem Sturm-Liouville te bewijzen.

Zonder bewijs vermelden we:

De existentiestelling (5.7):

Er bestaat een oneindige rij van reële eigenwaarden λ_n met de eigenschap $\lambda_{n+1}>\lambda_n$, $n=1,2,3,\ldots$

Als $Q(x)>0$, zijn alle eigenwaarden positief; is $Q(x)<0$ dan bestaan een eindig aantal negatieve eigenwaarden.

λ_n neemt onbegrensd toe als $n\to\infty$.

De ontwikkelingsstelling (5.8):

Zijn φ_n de orthonormale eigenfunkties van het Sturm-Liouville probleem, dan kan elke funktie $\Psi(x)\in C^2[0,1]$ die voldoet aan de randvoorwaarden (5.33) ontwikkeld worden in een op $[0,1]$ uniform en absoluut konvergente reeks van de vorm:

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\ \varphi_n(x)$$

met

$$A_n = \int_0^1 \rho\ \varphi_n\ \Psi(x)dx.$$

Toepassing: ontwikkeling van de funktie van Green.
Beschouw de inhomogene vergelijking met randvoorwaarden

$$\frac{d^2w}{dx^2} + [Q(x) + \lambda\rho(x)]\, w = F(x) \tag{5.38}$$

$$w(0) = w(1) = 0 \tag{5.39}$$

met gegeven funkties $Q(x)$, $\rho(x)$, $F(x) \in C^2[0,1]$; λ is konstant, $\rho>0$ op $[0,1]$. Stel λ is geen eigenwaarde van het homogene probleem (probleem (5.38) en (5.39) met $F(x)\equiv 0$).

De oplossing $w(x)$ van het inhomogene probleem bepalen we nu met behulp van de ontwikkelingsstelling als reeksontwikkeling, waarbij de termen op een konstante na gevormd worden door de eigenfunkties van het homogene probleem.
Als φ_n een eigenfunktie is en λ_n de bijbehorende eigenwaarde van het homogene probleem, dan vindt men met eenzelfde redenering als bij eigenschappen 2 en 3:

$$(\lambda - \lambda_n) \int_0^1 \rho\, \varphi_n\, w\, dx = \int_0^1 \varphi_n\, F\, dx. \tag{5.40}$$

We voeren in

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, \varphi_k(x). \tag{5.41}$$

Vgl. (5.41) met $\rho\varphi_n$ vermenigvuldigen en integreren levert voor $n=1,2,3,\ldots$

$$b_n = \frac{\int_0^1 \varphi_n\, F\, dx}{\lambda - \lambda_n}\ . \tag{5.42}$$

In plaats van de oplossing te ontwikkelen naar eigenfunkties kunnen we met behulp van de theorie van de Greense funktie de oplossing als volgt schrijven

$$w(x) = \int_0^1 G(x,\xi)F(\xi)d\xi. \tag{5.43}$$

Uit (5.41) - (5.43) volgt:

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda-\lambda_n}\ .$$

Met andere woorden, de funktie van Green voor het inhomogene probleem hebben we gekonstrueerd in de vorm van een reeks, waarbij de termen bepaald worden door de eigenfunkties van het homogene probleem.

We veronderstellen dat λ in (5.38) geen eigenwaarde was van het homogene probleem. Stel daarentegen nu dat $\lambda=\lambda_p$ (p een natuurlijk getal). We schrijven de gekonstrueerde oplossing (5.41), (5.42) in de vorm:

$$w(x) = \int_0^1 \sum_{n\neq p} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda-\lambda_n} F(\xi)d\xi + \frac{\varphi_p(x)}{\lambda-\lambda_p} \int_0^1 \varphi_p(\xi)F(\xi)d\xi.$$

De oplossing bestaat dus uitsluitend in deze vorm als

$$\int_0^1 \varphi_p(\xi)F(\xi)d\xi = 0$$

In dit geval is de oplossing niet volledig. Wij schrijven de oplossing dan in de vorm:

$$w(x) = \int_0^1 \sum_{n \neq p} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda-\lambda_n} F(\xi)d\xi + A_p \varphi_p$$

waarin A_p een konstante is.

Hoofdstuk 6: Vraagstukken.

Hoofdstuk 1:

1. Welke van de volgende differentiaalvergelijkingen zijn lineair? Welke van de lineaire differentiaalvergelijkingen zijn homogeen?

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{-x}$

b) $\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} + (1 + \cos x)y = \sin x$

d) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0$

e) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = (1 - y^2) \frac{dy}{dx}$

f) $\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0.$

Bepaal ook de orde van bovenstaande differentiaalvergelijkingen.

2. Schrijf 1 a, c, d, e, f als een stelsel van eerste orde differentiaalvergelijkingen.

3. Bepaal de algemene oplossing van:

$$\frac{dy}{dx} = 2, \quad \frac{dy}{dx} = -x^3, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sin x.$$

4. Welke van de volgende funkties

$$y_1 = x\sin x, \quad y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_3 = \sqrt{x}\cos x$$

is een oplossing van: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0.$

5. Gegeven zijn de differentiaalvergelijkingen $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$ en $\frac{dy}{dx} = \ln(1+\sin \frac{1}{y})$. In welke punten is $\sqrt{y}$ en $\ln(1+\sin \frac{1}{y})$ niet Lipschitz kontinu?
Ga na wat dit betekent voor $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \quad y(0) = 0.$

Hoofdstuk 2:

6. Bepaal het richtingsveld van de differentiaalvergelijkingen:

a) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2;$

b) $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2.$

7. Bepaal de algemene oplossing van de vergelijkingen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{2x+1}, \quad \frac{dy}{dx} = x^2(1-y).$$

8. $(3x^2-y^2)y' = 2xy, \quad y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x).$

9. Bepaal de algemene oplossing van $\frac{dy}{dx} = x+y$ en geef een schets van de integraal krommen in het x-y vlak.

10. Bepaal de algemene oplossing van $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$.

11. Bepaal de oplossing van $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0$ met beginvoorwaarde $y(0)=1$.

12. Bepaal de algemene oplossing van:

$$x^2 \frac{dy}{dx} - xy + y^2 = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} - 4y - x^2 \sqrt{y} = 0.$$

13. Toon aan dat de volgende differentiaalvergelijkingen exact zijn en bepaal de algemene oplossingen:

$$(x^3 + x^2 + 2y) \frac{dy}{dx} + 3x^2y + 2xy = 0$$

$$(x^2\cos xy + e^y) \frac{dy}{dx} + xy \cos xy + \sin xy = 0.$$

14. Bepaal alle differentiaalvergelijkingen, van het type

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

die een integrerende factor $M=X(x).Y(y)$ hebben. ($X(x)$ is een niet-konstante funktie die alleen van x afhangt en $Y(y)$ is een niet-konstante funktie die alleen van y afhangt.)

15. Bepaal de integrerende faktor van:

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x).$$

Bepaal vervolgens de algemene oplossing en vergelijk deze met formule (2.22), diktaat blz. 6.

16. Gegeven:

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + bx^\alpha \qquad a,b \neq 0.$$

a) Onderzoek de gevallen $\alpha=0$ en $\alpha=-2$. (Stel voor dit laatste geval $y=\frac{1}{z}$)

b) $\alpha \neq -1$.

Beschouw de transformatie:

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = X \qquad -\frac{1}{y} = Y.$$

Bepaal de differentiaalvergelijking voor $Y=Y(X)$.

c) Beschouw de transformatie:

$$x = \frac{1}{\xi}\ ; \quad y = -\xi(\frac{1}{a} + \xi\eta).$$

Bepaal de differentiaalvergelijking voor $\eta=\eta(\xi)$.

d) Leidt uit b) en c) af voor welke waarden van α de oorspronkelijke differentiaalvergelijking elementair oplosbaar is.

17. Bewijs dat de orde de differentiaalvergelijking $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$ die homogeen is van de graad k met één verlaagd kan worden door te stellen $y(x)=\exp(u(x))$. De differentiaalvergelijking $F(x,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$ heet homogeen van de graad k als geldt:

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\ldots,\lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}).$$

18. Bepaal de algemene oplossing van:

$$x^2yy'' - (y-xy')^2 = 0 \qquad \text{(maak gebruik van vraag 17).}$$

19. Gegeven is dat $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ een integrerende faktor $M=M(x)$ heeft. Bewijs dat de differentiaalvergelijking lineair is.

20. Bepaal de integrerende faktor van:

$$2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3 + (x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Is dit antwoord in overeenstemming met 19?

21. Bepaal de algemene oplossing van:

$$\frac{dy}{dx} = y \text{ tg } x + \cos x.$$

Hoofdstuk 3:

22. a) Schrijf 1a, c, d, e, f, als een eerste-orde vector differentiaalvergelijking.

b) Bepaal voor 1a en 1c $\vec{y}(x)$, $\vec{g}(x)$ en $A(x)$ in: $\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{g}(x)$.

23. Gegevem de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(\vec{y},x) \quad \text{en beginvoorwaarde} \quad \vec{y}(x_o) = \vec{y}_o.$$

$\vec{y}(x)$ en $\vec{f}(\vec{y},x)$ zijn n-dimensionale vectorfunkties.

In de (n+1) dimensionale Euclidische ruimte is het gebied G gedefinieerd door:
$|y-y_o| \leqq b$, $|x-x_o| \leqq a$ (a en b zijn konstanten).
Verder geldt:

$$|\vec{f}(\vec{y},x)| \leqq k(x) \; \{1 + |\vec{y}|\}$$

$$|\vec{f}(\vec{y}_1,x) - \vec{f}(\vec{y}_2,x)| \leqq k(x) \; |\vec{y}_1-\vec{y}_2|$$

$\vec{y}$, $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2 \in G$.

$k(x)$ is een kontinue funktie in x.
$\vec{f}(\vec{y},x)$ is kontinu op G in x en $\vec{y}$.

Bewijs met behulp van de methode van de suksessieve approximaties de existentie van een oplossing $\vec{y}(x)$ van de differentiaalvergelijking, waarvoor geldt $\vec{y}(x_o)=\vec{y}_o$. Bewijs dat voor deze oplossing geldt:

$$|\vec{y}(x) - \vec{y}_o| \leqq (1 + |\vec{y}_o|)(\exp(\int_{x_o}^{x} k(x')dx') - 1)$$

voor $|x-x_o| \leqq \alpha$

α is een konstante waarvoor geldt $\alpha \leqq a$.

24. Bepaal de oplossing van:

$$\frac{dy}{dx} = y + x \qquad y(0) = 0$$

met behulp van de methode van de suksessieve approximaties.
Vergelijk het resultaat met het antwoord van vraagstuk 9.

25. Gegeven de vector-differentiaalvergelijking:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{F}(x)$$

waarin:

$$\vec{y} = (y_1,y_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(x) = (0,x)$$

$$\vec{y}(0) = \vec{y}_o = (c_1,c_2)$$

e^x en e^{-x} zijn twee lineair onafhankelijke oplossingen van het homogene stelsel differentiaalvergelijkingen.

a) Bereken $\emptyset(x)$ in $\vec{y}_H = \emptyset(x)\vec{y}_o$ waarin $\vec{y}_H$ oplossing is van het homogene stelsel en $\emptyset(x)$ een matrix waarvoor geldt: $\emptyset(0)=I$ (I=eenheidsmatrix).

b) Bereken de algemene oplossing $\vec{y}$ van het inhomogene stelsel.

c) Bereken de oplossing van het inhomogene stelsel als $\vec{y}_o=(2,0)$.

26. Gegeven de vector differentiaalvergelijking:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(\vec{y},x).$$

$\vec{y}$ en $\vec{f}$ zijn n-dimensionale vectoren met komponenten y_i resp. f_i.
Onder welke voorwaarden kan men uit dit stelsel de volgende differentiaalvergelijking afleiden:

$$\frac{d^n y_i}{dx^n} = \varphi_i(x,y_i,y_i',\ldots,y_i^{(n-1)})?$$

27. Gegeven is het stelsel:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 + y_3; \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3 + y_1; \quad \frac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2.$$

Bepaal de algemene oplossing.

28. Gegeven is de vector differentiaalvergelijking:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} \quad \text{met} \quad \vec{y} = (y_1,y_2,y_3) \text{ en } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Bepaal de algemene oplossing.

29. Bepaal de algemene oplossing van $\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$ waarin:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -16 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{y} = (y_1,y_2).$$

Hoofdstuk 4:

30. Gegeven is de derde orde lineaire inhomogene differentiaalvergelijking:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 4x.$$

Bepaal de algemene oplossing.
Schrijf de vergelijking in vectorvorm, bereken de fundamentele matrix.
Bepaal de oplossing waarvoor geldt:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 2; \quad y''(0) = -1.$$

31. Bepaal de algemene oplossing van:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^{\,2} x = A \sin \omega t.$$

Hoe luidt de oplossing als $\omega=\omega_o$?

32. Ga de voorwaarden van de existentie- en eenduidigheidsstelling na voor:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad n > 0, \text{ geheel.}$$

Bepaal voor n=1 de algemene oplossing.

33. Benader de oplossing van:

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2 \qquad y(0) = -\frac{1}{2}$$

met behulp van:

a) $y(x) = y(x_o) + \sum_{n=1}^{5} \frac{(x-x_o)^n}{n!} \frac{d^n y(x_o)}{dx^n}$

b) $y(x) = a_o + \sum_{n=1}^{5} a_n x^n.$

34. Bepaal met behulp van machtreeksontwikkelingen de oplossingen van:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Herleid een der oplossingen tot een exponentiële funktie.

35. Gegeven de differentiaalvergelijking:

$$Ly = f(x),$$

met

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots a_1 \frac{d}{dx} + a_o$$

waarin $a_n, \dots, a_o$ konstanten zijn.

Ly=0 heeft eigenwaarden λ_i, $i=1,\dots,n$.
Wij onderscheiden voor de bepaling van een particuliere oplossing y_p van de inhomogene vergelijking de volgende gevallen:

a) $f(x) = a\,e^{\mu x}$; a=konstante; $\lambda_i \neq \mu$; $i=1,\dots,n$.
Stel $y_p = A\,e^{\mu x}$.

Voorbeeld:

$$y''' - y'' + y' - y = e^{2x}.$$

b) $f(x)=a\ e^{\mu x}$; $\mu=\lambda_1$ terwijl λ_1 een multipliciteit s heeft.

Stel $y_p=P_{s-1}(x)e^{\mu x}.x^s$ waarin $P_{s-1}(x)$ een veelterm van de graad s-1 is.

Voorbeeld:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}.$$

c) $f(x)=P_m(x)$; Stel $y_p=Q_m(x).P_m(x)$ en $Q_m(x)$ zijn veeltermen van de graad m.

Voorbeeld:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 1.$$

d) $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$; $\lambda_i \neq \mu$; $i=1,\ldots,n$.

Stel $y_p=Q_m(x)e^{\mu x}$.

Voorbeeld:

$$y'' + 2y' + y = x\ e^x.$$

e) $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$; $\mu=\lambda_1$ terwijl λ_1 een multipliciteit s heeft.

Stel $y_p=Q_m(x)x^s\ e^{\mu x}$.

Voorbeeld:

$$y'' + 2y' + y = x\ e^{-x}.$$

36. Bepaal met behulp van machtreeksontwikkelingen:

a) de algemene oplossing van: $y''+(\sin x)y=e^{x^2}$;

b) een particuliere oplossing van $y''+2xy'+4y=e^x$.

37. Voor welke waarde van α heeft

$$y'' - 2xy' + \alpha y = 0$$

een oplossing die een veelterm is in x?

38. Gegeven de differentiaalvergelijkingen:

a) $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sin\varphi = 0$

b) $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varphi - \frac{1}{6}\ {}^3 = 0$

c) $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varphi = 0.$

Voor alle vergelijkingen gelden de beginvoorwaarden:

$$\varphi(0) = 0 \quad \frac{d\varphi}{dt}(0) = 2.$$

Bepaal de oplossing van a) door de differentiaalvergelijking achtereenvolgens te differentiëren en de verkregen waarde van $\frac{d^n\varphi}{dt^n}(0)$ te substitueren in de Taylorreeks van $\varphi(t)$.

Schrijf b) als een stelsel en bepaal met behulp van de methode van de sukses-sieve approximaties de oplossing.
Substitueren in c) $\varphi=e^{\lambda t}$, bepaal λ; ontwikkel de verkregen oplossing in een Taylorreeks.
Vergelijk de coëfficienten van de reeksontwikkelingen van de oplossingen van de drie differentiaalvergelijkingen.

39. Bepaal de algemene oplossing van:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2y = x^2 + \frac{1}{x} \qquad \text{voor } x > 0.$$

40. Bepaal de index-vergelijking en de recurrente betrekkingen voor de coëfficienten van de machtreeksen, die oplossingen zijn van:

a) $2xy'' + y' + xy = 0 \qquad (x > 0)$
b) $xy'' + y' - y = 0 \qquad (x > 0).$

41. Bepaal door middel van machtreeksontwikkelingen twee lineair onafhankelijke oplossingen van:

$$x^2y'' + xy' + (x^3-1)y = 0 \qquad x > 0.$$

Ga na waarom ln x niet in de algemene oplossing voorkomt.

42. Bepaal van de differentiaalvergelijking van Laguerre:

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0 \qquad (x > 0),$$

(λ is een positieve konstante),
De index-vergelijking, de recurrente betrekking en een oplossing. Toon aan dat als λ een positief geheel getal is, deze oplossing zich reduceert tot een veelterm.

<u>Hoofdstuk 5</u>:

43. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y'' + \frac{\pi^2}{4} y = f(x)$$

met $f(x) \in C'[0,1]$
en randvoorwaarden $y(0)=y(1)=0$.
Bepaal de funktie van Green voor dit probleem en geef de oplossing.

44. Gegeven is de differentiaalvergelijking:

$$x^2y'' + xy' - \frac{9}{4} y = \sqrt{x} \qquad 0 < x \leqq 1. \qquad (1)$$

a) Breng de homogene vergelijking m.b.v. de transformatie van Liouville in de standaardvorm.
Bepaal vervolgens twee lineair onafhankelijke oplossingen u_1 en u_2 van de homogene differentiaalvergelijking in de standaardvorm zodanig dat:

$$u_1(1) = 0; \quad \lim_{x \downarrow 0} u_2(x) = 0.$$

Bepaal de funktie van Green.

b) Bereken $y(\frac{1}{2})$, als $y(x)$ voldoet aan (1) en aan de randvoorwaarden $y(1)=0$; $\lim_{x \to 0} y(x)=0$.

45. Gegeven het randwaardeprobleem:

$$y'' + 2y' + y = f(x); \qquad 1 \leqq x \leqq e$$

$y(1)=y(e)=0 \quad f(x)\in C'[1,e]$.
Bepaal de funktie van Green voor dit probleem; bereken $y(2)$ als $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2}$.

46. Gegeven:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = \sin kx$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

λ en k zijn positieve konstanten.

a) Bepaal de oplossing van dit probleem met behulp van de funktie van Green.
b) Geef de ontwikkeling van de funktie van Green in de eigenfunkties van het homogene probleem.
c) Zij λ een eigenwaarde van het homogene probleem. Voor welke waarde(n) van k bestaat dan de oplossing?

47. Gegeven:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x^2}\, y = f(x)$$

waarin $f(x)\in C'[1,4]$
en randvoorwaarden $y(1)=y(4)=0$.
Bepaal de oplossing van dit randwaarde probleem met behulp van de funktie van Green.

48. Gegeven:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2y = f(x)$$

$$f(x) \in C'[0,1]; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = \alpha.$$

a) Bepaal als $\alpha=0$ de oplossing van het randwaardeprobleem met behulp van de funktie van Green.

b) Bepaal de oplossing voor het geval dat $\alpha=1$.

Literatuur.

[1] Kamke, E. Differentialgleichungen Bd. I. Leipzig 1964.

[2] Stepanow, W.W. Lehrbuch der Differentialgleichungen. Berlin 1963.

[3] Boyce, W.E. Diprima, R.C. Introduction to differential equations. New York 1970.

[4] Kaplan, W. Ordinary differential equations. 1958.

[5] Ince, E.L. Ordinary differential equations.

[6] Coddington, E.A.*) Levinson, N. Theory of ordinary differential equations. New York 1955.

*) Als inleiding minder geschikt,

1e deeltentamen grondslagen differentiaalvergelijkingen

Datum : 08-04-1974 ; Tijd : 3 uur.

Het totale werk is 20 pt. waard.

Opg.1 = 5 pt.

Beschouw voor $t \geqslant 0$ het stelsel diff. vgl. + beginvoorwaarden

(*) :

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2.\ \exp(-y) & ; \quad x(0) = 0 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \exp(-x) & ; \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

a. We definiëren de baankromme behorend bij (*) als de deelverzameling van het $\ulcorner x,y \urcorner$-vlak van de punten $\ulcorner x(t),y(t) \urcorner$ met $t \geqslant 0$ en $x(t)$, $y(t)$ de oplossingen van (*).

Zij deze baankromme gegeven, als $y = f(x)$ voor $x \geqslant 0$.

Laat zien, dat de helling van de baankromme $\frac{dy}{dx}$ voldoet aan :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

b. Geef een diff. vgl. + beginvoorwaarde voor de baankromme en los deze op.

Geef een schets van de baan.

Bestaat er een asymptoot voor $t \to \infty$? Zo ja, welke ?

c. Bepaal tenslotte $x(t)$.

Opg.2 = 5 pt.

Gegeven zij het onderstaande inhomogene stelsel diff. vgl. :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .\ \exp(t)$$

a. Bepaal 2 lineair onafhankelijke oplossingen van het homogene probleem.

Z.O.Z.

b. Geef vervolgens de algemene oplossing van het inhomogene probleem.

opg. 3 = 6 pt.

Beschouw de volgende integraalvgl. voor $t \geq 0$:

(*1) $$y(t) = y_0 + \int_0^{s(t)} f(\tau, y(\tau))d\tau \qquad \text{met } y_0 \in \mathbb{R}.$$

Er geldt :

(i) $s \in C^1[0,a]$; $s(0) = 0$ en voor $0 < t \leq a$: $0 \leq s(t) \leq t$

(ii) $f \in C(G)$ en $f(t,y)$ is Lipschitz-continu in y met Lipschitz-constante λ op het gebied G met $G = [0,a] \times [y_0-b, y_0+b]$ met $a,b > 0$

Beschouw naast (*1) de diff. vgl. + beginvoorwaarde :

(*2) $y'(t) = s'(t).\, f(t,y(s(t)))$; $y(0) = y_0$.

a. Laat zien, dat geldt :

$y \in C^1[0,a]$ en y is oplossing van (*2) $\Leftrightarrow$

$y \in C[0,a]$ en y is oplossing van (*1)

b. Definieer in dit geval een Picard-Lindelöf iteratieproces.

c. Laat zien, dat dit proces uniform convergeert in $C[0,\alpha]$ met geschikte $\alpha > 0$ naar een oplossing van (*1)

Hint : Vind een schatting voor het verschil tussen twee opeenvolgende iteranden en gebruik de idenditeit

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1})$$ om aan te tonen, dat y_n een Cauchy rij is.

Opg.4 = 4 pt.

Als een speciaal geval van opg. 3, (*2) beschouwen we :

$z'(t) = z(\tfrac{1}{2}t)$; $z(0) = 1$

a. Geef de oplossing in de vorm van een machtreeks $z = \sum_0^\infty a_n t^n$, waarbij de coëfficienten a_n expliciet zijn bepaald.

b. Het is interessant het groeigedrag voor $t \to \infty$ van z te vergelijken met exponentieel groeigedrag voor $t \to \infty$. Toon aan, dat voor elke $\lambda > 0$ geldt

$$z(t) = o(\exp(\lambda t)) \text{ voor } t \to \infty.$$

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1 - - y_n) \quad \nu \in \underline{n}$$

Es gilt wieder der Existenzsatz von Peano:
Sind die $f_\nu(x, y_1 - - - y_n)$ in dem Gebiet $\mathcal{G}(x, y_1 - - - y_n)$ stetig, so geht durch jeden Punkt P mit den Koordinaten $\xi, \eta_1 - - - \eta_n$ von $\mathcal{G}$ mindestens eine Integralkurve, und diese kann nach beiden Seiten bis an den Rand von $\mathcal{G}$ fortgesetzt werden.

Uit: Differentialgleichungen
Lösungsmethoden und Lösungen, Band I, blz 33
Kamke

KA 08 2-1.

Tentamen Grondslagen Differentiaalvergelijkingen 28 mei 1974, 13.30 - 16.30 uur.

1. Beschouw de vergelijking van het type Euler

$$x^3y''' + 2x^2y'' + \lambda xy' - \lambda y = 0$$

voor $x > 0$; λ is een willekeurige konstante.

Bepaal drie onafhankelijke oplossingen van de vergelijking.

Onderscheid hierbij verschillende waarden van λ en bewijs de onafhankelijkheid van de verkregen oplossingen.

2. Gegeven is de vergelijking

$$y'' + \lambda y = 0$$

De konstante λ wordt bepaald door nader te speciferen voorwaarden.

a. Beschouw de vergelijking op het interval [0,1] met randvoorwaarden $y(0) = y(1) = 0$.

Geef de eigenfuncties en eigenwaarden van het probleem.

b. Beschouw het interval [1,3] met randvoorwaarden $y(1) = y(3) = 0$.

Geef opnieuw de eigenfuncties en eigenwaarden.

3. Beschouw de vergelijking

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

α is een konstante.

a. Bepaal twee lineair onafhankelijke oplossingen door reeksontwikkelingen in een omgeving van $x = 0$.

We noemen deze $h_1(x)$ en $h_2(x)$.

Bepaal de konvergentiestraal van de reeksen.

N.B. In de volgende onderdelen spelen $h_1(x)$ en $h_2(x)$ opnieuw een rol; het is echter niet de bedoeling dat hierbij de verkregen reeksontwikkelingen worden gesubstitueerd.

b. Beschouw vervolgens het randwaardeprobleem

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = f(x)$$

met randvoorwaarden $y(-1) = y(1) = 0$;

$x \in [-1,1]$ en $f(x) \in C[-1,1]$, $f(-1) = f(1) = 0$

De konstante α is zodanig gekozen dat er geen niet-triviale oplossingen van het homogene randwaardeprobleem bestaan.

Breng door middel van de Liouville-transformatie het probleem in de gedaante

$$\eta'' + R^*(x)\eta = f^*(x), \quad \eta(-1) = \eta(1) = 0 \qquad (*)$$

c. Bereken de wronskiaan w behorende bij het oorspronkelijke en het getransformeerde homogene probleem.

d. Indien $\eta_1(x)$ en $\eta_2(x)$ lineair onafhankelijke oplossingen zijn van het getransformeerde homogene probleem, luidt de oplossing van het inhomogene probleem (zonder toepassing van randvoorwaarden)

$$\eta(x) = \frac{1}{w} \int^x [\eta_2(x)\eta_1(\xi) - \eta_1(x)\eta_2(\xi)]\, f^*(\xi)d\xi + A_1\eta_1(x) + A_2\eta_2(x)$$

Bepaal de Greense functie behorende bij het randwaardeprobleem en geef een uitdrukking voor de oplossing y(x) van het oorspronkelijke randwaardeprobleem.